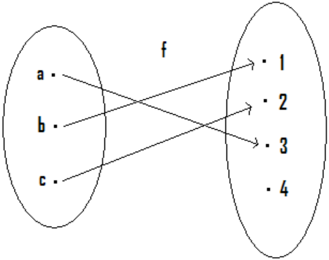
Injektio

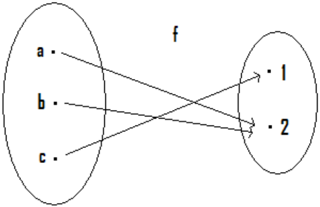
Funktiota sanotaan **injektioksi**, mikäli lähtöjoukon eri alkiot kuvautuvat maalijoukon eri alkioille. Esim.



Funktio f on siis injektio mikäli ehdosta $f(x_1) = f(x_2)$ seuraa, että $x_1 = x_2$.

Surjektio

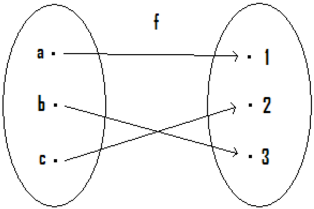
Funktiota sanotaan **surjektioksi**, mikäli sen arvojoukko on koko maalijoukko. Esim.



Funktio $f : A \to B$ on siis surjektio, mikäli jokaista $y \in B$ kohti löytyy $x \in A$, jolle $f(x) = y$.

Bijektio

Funktiota sanotaan **bijektioksi**, mikäli se on sekä injektio että surjektio.
Esim.



Äärelliset joukot

Tarkastelemme seuraavaksi erilaisten joukkojen kokoja. Lähdetään siitä, että

- tyhjässä joukossa $\emptyset$ ei ole yhtään alkiota
- joukossa $\{1\}$ on yksi alkio
- joukossa $\{1, 2, \ldots, n\}$ on n alkiota

Kuinka mittaamme muunlaisten joukkojen kokoa?
Vastaus: Käytämme apuna bijektioita!

Määritelmä

Joukko A on **äärellinen**, mikäli on olemassa bijektio $A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$. Joukossa A on tällöin n alkiota, merkitään $\sharp A = n$.

Joukossa A on siis tarkalleen n alkiota, mikäli jokaista A:n alkiota vastaa täsmälleen yksi luku $1, 2, \ldots, n$. Huom. myös tyhjää joukkoa sanotaan äärelliseksi.

Esimerkki

Osoita, että joukot $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ja $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ ovat yhtä suuret, toisin sanoen etsi bijektio joukolta A joukolle B.
Ratkaisu:
Haluttu bijektio saadaan asettamalla kaikilla $m \in A$

$$f : A \to B, \quad f(m) = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2.$$

Kuvaus todella on bijektio (tarkista yksityiskohdat!).
Entä jos $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ ja $B = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$, ts. molemmissa joukoissa on ääretön määrä alkioita?

Äärettömät joukot

Joukkoa, joka ei ole äärellinen sanotaan **äärettömäksi**. Vaikka tarkasteltavat joukot olisivatkin äärettömiä, voidaan niiden kokoja kuitenkin vertailla:

Määritelmä

Joukot A ja B ovat **yhtä mahtavat** mikäli on olemassa bijektio $A \to B$.

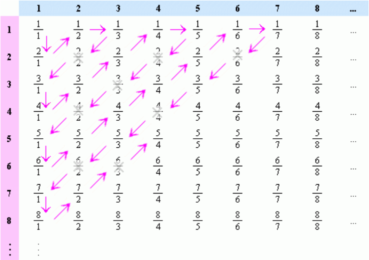
Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on "pienin" ääretön joukko. Sen kanssa yhtä mahtavia joukkoja sanotaan **numeroituvasti äärettömiksi**.
Esim. $\mathbb{N}$ ja $\{0, 2, 4, \ldots\}$ ovat yhtä mahtavat: $f(n) = 2n$ määrittelee bijektion niiden välille. Joukkojen välillä on siis vastaavuus

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots \end{array}$$

Numeroituvuuden osoittamiseksi riittää oleellisesti löytää tapa luetella tarkasteltavan joukon jäsenet jossakin järjestyksessä.
Vastaavasti nähdään helposti, että $\mathbb{Z}$ on numeroituva.

$\mathbb{Q}$ on numeroituva

Esitetään aluksi tapa luetella positiiviset rationaaliluvut. Taulukoidaan ne osoittajan ja nimittäjän suhteen kasvavaan järjestykseen ja lähdetään liikkeelle vasemmasta ylänurkasta, eli luvusta $\frac{1}{1}$ kuvan osoittamalla tavalla. Kuten kuvassa, hypätään vastaantulevan murtoluvun yli, mikäli sitä vastaava rationaaliluku on jo osunut kohdalle. Tällä tavoin saadaan käytyä läpi kaikki positiiviset rationaaliluvut! Huomaa, että lukuja ei lueteltu suuruusjärjestyksessä!



$\mathbb{Q}$ on numeroituva

Entäpä negatiiviset rationaaliluvut? Jos positiivisia rationaalilukuja, joiden joukko juuri osoitettiin numeroituvaksi, merkitään $q_1, q_2, q_3, \ldots$, niin voidaan määritellä vastaavuus

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ 0 & q_1 & -q_1 & q_2 & -q_2 & \cdots \end{array}$$

On siis olemassa bijektio $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, eli $\mathbb{Q}$ on numeroituva!

$\mathbb{Q}$ on numeroituva

Rationaalilukujen numeroituvuus voidaan nähdä myös toisella tavalla. Määritellään positiivisten kokonaislukujen pareilla (n, m) funktio $f(n, m) = 2^n 3^m$. Koska 2 ja 3 ovat alkulukuja (tutustutaan näihin ensi viikolla), niin f on injektio. Tämä tarkoittaa sitä, että positiivisten kokonaislukujen parien muodostama joukko on "korkeintaan" yhtä mahtava kuin $\mathbb{N}$. Takuulla noita pareja on kuitenkin äärettömän monta ja siten niiden joukko on yhtä mahtava kuin $\mathbb{N}$. Rationaaliluvut voidaan puolestaan ajatella kokonaislukuparien osajoukkona, kuten aiemminkin.

Äärettömät yhdisteet ja leikkaukset

Aikaisemmin katsottiin kahden joukon yhdisteitä ja leikkauksia. Jos I on mikä tahansa *indeksijoukko* ja A_i on kullakin indeksillä $i \in I$ jokin joukko, niin voimme määritellä

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \quad \text{jollakin } i \in I\}$$

ja

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \quad \text{jokaisella } i \in I\}.$$

Jos I on numeroituva, ja jokainen A_i, $i \in I$, on numeroituva, niin yhdiste $\bigcup_{i \in I} A_i$ on numeroituva. Tämä nähdään oleellisesti samalla tavalla, kuin positiivisten rationaalilukujen joukon numeroituvuus.

$\mathbb{R}$ on ylinumeroituva

Osoitetaan, että $\mathbb{R}$ on **ylinumeroituva**, ts. että se ei ole numeroituva! Jokainen reaaliluku voidaan kirjoittaa yksikäsitteisesti päättymättömänä desimaalilukuna. Päättyvä luku, esim. $1,2$ kirjoitetaan tässä siis käyttämällä yhdeksikköjä, eli muodossa $1,1999\ldots$.
Tehdään vastaoletus: $\mathbb{R}$ on numeroituva.
Tässä tapauksessa, kaikki reaaliluvut voidaan esittää luettelossa

$$\begin{array}{ll}
n_{11}, c_{12}c_{13}c_{14}\ldots & \color{red}{m_1}, c_{12}c_{13}c_{14}\ldots \\
n_{21}, c_{22}c_{23}c_{24}\ldots & n_{21}, \color{red}{d_2}\, c_{23}c_{24}\ldots \\
n_{31}, c_{32}c_{33}c_{34}\ldots & n_{31}, c_{32}\color{red}{d_3}\, c_{34}\ldots \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

missä n_{ij}:t ovat kokonaislukuja ja c_{ij}:t ovat numeroita $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$.
Konstruoidaan sitten reaaliluku, joka ei ole tuossa luettelossa:
Olkoon ensin $m_1 \neq n_{11}$ kokonaisluku, sitten $d_2 \neq c_{22}$ numero,$d_3 \neq c_{33}$ jne. Näin saadaan reaaliluku $m_1, d_2d_3\ldots$, joka ei ole luettelossa (jokainen luettelon luvuista eroaa siitä vähintään yhden desimaalin kohdalla). Tämä on ristiriita, joten vastaoletuksen on oltava väärin.

Reaalilukujen ylinumeroituvia osajoukkoja

- Se, että reaaliluvut voivat olla rajoittamattoman suuria tai pieniä, ei ollut oleellista $\mathbb{R}$:n ylinumeroituvuuden kannalta. Vastaavanlainen konstruktio voitaisiin tehdä yksikkövälille $[0,1)$, joka siis myös on ylinumeroituva.
- Koska $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, ja $\mathbb{Q}$ on numeroituva, niin irrationaalilukujen joukon $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on oltava ylinumeroituva!
- Aiemmin esillä olleiden algebrallisten reaalilukujen joukko nähdään melko helposti numeroituvaksi. Siispä transsendenttisten lukujen joukko on oltava ylinumeroituva! Huom. tämä on eräs tapa osoittaa, että niitä on yleensäkään olemassa.

Luonnollisten lukujen potenssijoukko

Luonnollisten lukujen <u>äärellisten</u> osajoukkojen muodostama joukko on numeroituva , kun taas $\mathbb{N}$:n <u>äärettömien</u> osajoukkojen joukko on ylinumeroituva. Luonnollisten lukujen potenssijoukko, joka koostuu siis $\mathbb{N}$:n äärellisistä <u>ja</u> äärettömistä osajoukoista, on siten ylinumeroituva. Itseasiassa se ja $\mathbb{R}$ ovat yhtä mahtavat.

$(0,1)$ ja $\mathbb{R}$ ovat yhtä mahtavat

Trigonometriaa opiskelleet tuntevat tangenttifunktion

$$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

tan on bijektio, joten $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ja $\mathbb{R}$ ovat yhtä mahtavat. Toisaalta, olivatpa $a < b$ ja $c < d$ mitä tahansa reaalilukuja , funktio

$$f : (a,b) \to (c,d), \quad f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$$

on bijektio. Siis välit (a,b) ja (c,d) ovat yhtä mahtavat. Erityisesti välit $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ja $(0,1)$ ovat yhtä mahtavat ja siten $(0,1)$ ja $\mathbb{R}$ ovat yhtä mahtavat.

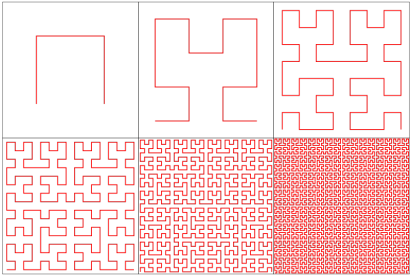
Viiva on yhtä mahtava kuin neliö

Georg Cantor onnistui ensimmäisenä konstruoimaan bijektion yksikköväliltä $[0, 1]$ yksikköneliölle! Sitä seurasi Giuseppe Peanon löytämä ensimmäinen ”avaruuden täyttävä käyrä”. Myös David Hilbert konstruoi oman ”avaruuden täyttävän käyränsä”, jota katsomme nyt hieman tarkemmin.

Giuseppe Peano (1858-1932)
David Hilbert (1862-1943)

Hilbertin käyrä

Kuvassa näkyy Hilbertin käyrän konstruktion kuusi ensimmäistä vaihetta:



Käyrä joka lopulta täyttää yksikköneliön saadaan tämän konstruktion *rajafunktiona*. Näin saatu käyrä on analyysin mielessä *jatkuva*; se on seurausta konstruktiossa olevien funktioiden *tasaisesta suppenemisesta*. Se todellakin täyttää koko neliön: Tarkastellaanpa mitä hyvänsä neliön pistettä, löytyy konstruktiossa vaihe, joka kulkee mielivaltaisen läheltä tuota pistettä. Siten rajafunktion täytyy koskettaa tuota pistettä. Saatu avaruuden täyttävä käyrä kuitenkin leikkaa itseään, eli se ei ole injektio!

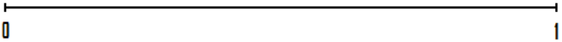
Hilbertin käyrä

Mahtavuuksien kannalta tämä tarkoittaa sitä, että yksikköväli on *ainakin yhtä mahtava* kuin neliö. Koska yksikköväli on neliön osajoukko, ovat ne yhtä mahtavat. Päättelyä voi vielä jatkaa toteamalla, että neliö ja taso ovat yhtä mahtavat (kuten reaalisuora ja yksikköväli). Siis yksikköväli on yhtä mahtava kuin taso.

Cantorin joukko

Konstruoidaan seuraavaksi Cantorin joukko. Lähdetään liikkeelle yksikkövälistä

$$C_0 = [0, 1]$$



Otetaan siitä pois keskimmäinen kolmannes, jolloin jäljelle jää

$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

Otetaan taas molemmista väleistä pois keskimmäinen kolmannes:

$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

Cantorin joukko

Jatketaan samaan malliin, eli määritellään C_i kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla i ottamalla edellisen joukon muodostavista väleistä pois keskimmäinen kolmannes. Määritellään Cantorin joukko näiden leikkauksena:

$$C = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i.$$

Mitkä reaaliluvut kuuluvat tähän joukkoon vai onko se kenties tyhjä joukko? Tarkastelemalla välin $[0, 1]$ lukuja 3-kantaisessa järjestelmässä huomataan, että C_1 koostuu luvuista joiden desimaaliesitys kannassa kolme alkaa $0, 0 \ldots_3$ tai $0, 2 \ldots_3$.
Esim. $1/3 = 0, 1_3 = 0, 0\overline{2}_3$ ja $1 = 0, \overline{2}_3$ kuuluvat C_1:een , mutta $1/2 = 0, \overline{1}_3$ ei.
Vastaavasti C_2 koostuu luvuista joiden desimaaliesitys kannassa kolme alkaa $0, a_1 a_2 \ldots_3$, missä $a_1, a_2 \in \{0, 2\}$.
Esim. $2/9 = 0, 02_3$ ja $7/9 = 0, 21_3 = 0, 20\overline{2}_3$ kuuluvat C_2:een , mutta $5/9 = 0, 12_3$ ei.

Cantorin joukko

Yleisesti, C_i koostuu reaaliluvuista joiden (eräs) desimaaliesitys kannassa kolme on muotoa $0, a_1 a_2 a_3 \ldots_3$, missä $a_1, a_2, \ldots, a_i \in \{0, 2\}$. Loppujen lopuksi, koko Cantorin joukko C koostuu reaaliluvuista, joiden (jossakin) kolmikantaisessa esityksessä esiintyy vain nollia ja kakkosia. Tällaisten lukujen joukko on ylinumeroituva, ts. C on ylinumeroituva! Kuitenkin kukin C_i koostuu $(2/3)^i$ kokoisista väleistä , joten C sisältyy mielivaltaisen pieneen välien yhdisteeseen. Toisin sanoen, sen mitta, eli pituus on nolla!
Eikä siinä vielä kaikki!
Dimensio eli ulottuvuus voidaan määritellä järkevästi tällaisellekin "fraktaalijoukolle". Cantorin joukon ulottuvuudeksi voidaan laskea

$$\frac{\log 2}{\log 3}.$$

Onko joku vielä sitä mieltä, että matematiikka on tylsää?!