Joukot

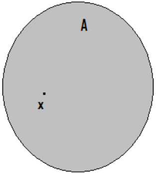
Matematiikassa on pyrkimys määritellä monimutkaiset asiat täsmällisesti yksinkertaisempien asioiden avulla. Tarvitaan jokin lähtökohta, muutama yleisesti hyväksytty ja ymmärretty käsite, joista sitten rakennetaan muut käsitteet. Tarkastelemme seuraavaksi Georg Cantorin 1900-luvun taitteessa luomaa naiivia joukko-oppia.

Georg Cantor (1845-1918)

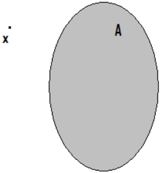
Joukkojen peruskäsitteet

Määrittelemättömät peruskäsitteet ovat:
alkio, **joukko**, ja relaatio **"alkio kuuluu joukkoon"**.
Joukot siis muodostuvat alkioista. Merkitään

x	$\in$	A
alkio x	kuuluu	joukkoon A



x	$\notin$	A
alkio x	ei kuulu	joukkoon A



Samat joukot

Joukot ovat samat, jos niissä on täsmälleen samat alkiot.
So. joukot A ja B ovat samat, merkitään $A = B$, kun pätee

$$x \in A, \text{ jos ja vain jos (lyhennetään joss.) } x \in B.$$

Joukkojen merkinnöistä

Huomattavaa:

- Joukkoja voidaan merkitä mm. seuraavin tavoin:
  $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{a, b, c, \ldots, h\}$, $A_3 = \{a, b, c, \ldots\}$
  tai käyttämällä alaindeksejä
  $B = \{a_1, a_2, a_3\}$, $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $D = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$
  tai antamalla ehto $E = \{x : x \text{ toteuttaa annetun ehdon}\}$,
  esim. $\{x : x \text{ on positiivinen reaaliluku}\}$ tai $\{x : x \text{ on hedelmä}\}$.
- Jokainen alkio esiintyy vain kerran, esim. $\{a, b, a\} = \{a, b\}$.
- Alkioiden järjestyksellä ei ole väliä, esim. $\{a, b\} = \{b, a\}$.
- Tyhjää joukkoa $\{\}$ merkitään $\emptyset$.

Lukujoukot

Esimerkiksi juuri tarkastelemamme erilaiset luvut muodostavat lukujoukkoja. Näitä merkitään usein seuraavin symbolein

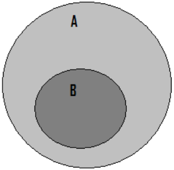
- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (engl. natural numbers)
- Kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (saksaksi Zahlen)
- Rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ (engl. quotient = osamäärä)
- Reaaliluvut $\mathbb{R}$ (engl. real numbers)

Positiivisista (vastaavasti negatiivisista) kokonaisluvuista käytetään usein merkintää $\mathbb{Z}_+$ (vast. $\mathbb{Z}_-$) , ts.

$$\mathbb{Z}_+ := \{1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{ja} \quad \mathbb{Z}_- := \{-1, -2, -3, \ldots\}.$$

Osajoukot

Joukko B on joukon A osajoukko, jos jokainen B:n alkio on myös A:n alkio.
Toisin sanoen jos $x \in B$, niin $x \in A$.
Tällöin merkitään $B \subset A$ (joskus $B \subseteq A$).



Esimerkiksi

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Olkoot $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{1, 4\}$. Tällöin $A \not\subset B$ ja $B \not\subset A$.
- Tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko, eli $\emptyset \subset A$ millä tahansa joukolla A.

Huomaa, että $A = B$, jos ja vain jos $A \subset B$ ja $B \subset A$!

Reaalilukuvälit

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$. Merkitään reaalilukuvälejä

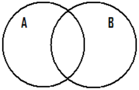
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Esim. $(-3, \pi] = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x \leq \pi\}$ ja $[0, 3] \subset (-3, \pi]$, sillä $\pi > 3$.
Rajoittamattomia reaalilukuvälejä merkitään vastaavasti:

- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
- $(\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $(\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

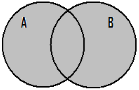
Joukko-operaatiot

Olkoot A ja B joukkoja.

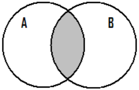


Määritellään

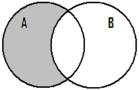
yhdiste $A \cup B = \{x : x \in A \text{ tai } x \in B\}$



leikkaus $A \cap B = \{x : x \in A \text{ ja } x \in B\}$



erotus $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ ja } x \notin B\}$



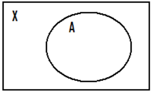
Esimerkki joukko-operaatioiden käytöstä

Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{3, 4, 5\}$. Nyt

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A \cap B = \{3\}$
- $A \setminus B = \{1, 2\}$

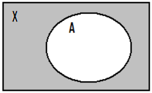
Huomaa, että joukko-operaatioita voidaan tietysti tehdä myös useammille joukoille!

Komplementti



Olkoon X jokin *perusjoukko* ja $A \subset X$.

Määritellään



komplementti $A^{\complement} = \{x \in X : x \notin A\}$

Esimerkki joukko-operaatioiden käytöstä

Olkoon $X = \mathbb{R}$ perusjoukko ja olkoot $A = (-1, 1)$ ja $B = [1, 2)$. Nyt

- $A \cup B = (-1, 2)$
- $A \cap B = \emptyset$
- $A^{\complement} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ tai } x \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Huom! Joukkoa A voidaan merkitä toisella tapaa muistamalla reaaliluvun **itseisarvo**

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0 \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Huomaa, että $|x| \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Nyt voidaan merkitä

$$A = (-1, 1) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$$

ja toisaalta

$$A^{\complement} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}.$$

Joukot alkioina

Joukko voi olla myös alkiona toisessa joukossa! On tärkeää oppia erottamaan alkion ja sen muodostaman joukon ero, samoin kuin relaatioiden $\in$ ("kuuluu") ja $\subset$ ("sisältyy") välinen ero.

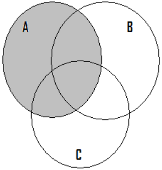
- Olkoon $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$. Nyt $\{1, 2\} \in A$ ja $\{1, 2\} \subset A$. Ei kuitenkaan $A \in A$!
- Onko $\{\emptyset\}$ tyhjä joukko?
  Onko $2 \in \{1, \{1, 2\}\}$?
- Eräs usein esiintyvä joukkojen muodostama joukko on **potenssijoukko**, eli annetun joukon kaikkien osajoukkojen muodostama joukko. Joukon A potenssijoukolle käytetään usein merkintää $\mathcal{P}(A)$. Esim. Joukon $\{1, 2, 3\}$ potenssijoukko on

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

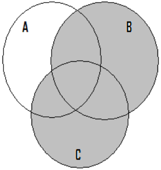
Huom! Jos joukossa on n alkiota, niin sen potenssijoukossa on 2^n alkiota! Kuinka tämä voidaan todistaa?

Osittelulaki

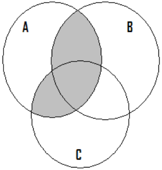
Olkoot A, B ja C joukkoja. Tarkastellaan osittelulakia $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ensin Venn-diagrammien avulla:



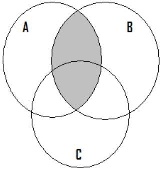
A



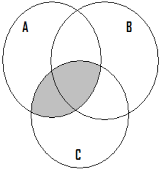
$B \cup C$



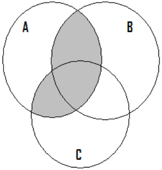
$A \cap (B \cup C)$



$A \cap B$



$A \cap C$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Osittelulain todistus

Todistetaan kaava $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ oikeaksi osoittamalla sisältyvyys molempaan suuntaan.
$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$:
Jos $A \cap (B \cup C) = \emptyset$, niin asia selvä.
Olkoon sitten $x \in A \cap (B \cup C)$ mielivaltainen.
Leikkauksen määritelmän mukaan $x \in A$ ja $x \in B \cup C$, josta edelleen yhdisteen määritelmän mukaan $x \in B$ tai $x \in C$:

- Jos $x \in B$, niin $x \in A \cap B \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Jos $x \in C$, niin $x \in A \cap C \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

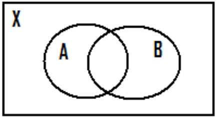
Siis molemmissa tapauksissa $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$:
Olkoon $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (jos $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset$ niin asia selvä).
Yhdisteen määritelmän mukaan $x \in A \cap B$ tai $x \in A \cap C$.

- Jos $x \in A \cap B$, niin $x \in A$ ja $x \in B \subset B \cup C$, eli $x \in A \cap (B \cup C)$.
- Jos $x \in A \cap C$, niin $x \in A$ ja $x \in C \subset B \cup C$, eli $x \in A \cap (B \cup C)$.

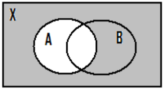
Molemmissa tapauksissa $x \in A \cap (B \cup C)$.

De Morganin laki

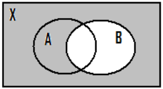
Olkoot A ja B perusjoukon X osajoukkoja.



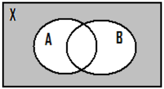
Tarkastellaan De Morganin lakia $(A \cup B)^{\mathsf{C}} = A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}$:



A^{C}



B^{C}



$A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}$

De Morganin lain todistus

Olkoon $x \in X$. Nyt $x \in (A \cup B)^\complement$

$$\begin{aligned}
&\iff x \notin A \cup B \\
&\iff x \notin A \text{ ja } x \notin B \\
&\iff x \in A^\complement \text{ ja } x \in B^\complement \\
&\iff x \in A^\complement \cap B^\complement
\end{aligned}$$

Siis $(A \cup B)^\complement = A^\complement \cap B^\complement$.

Joukkojen identtisyyksiä

Olkoot A, B ja C perusjoukon X osajoukkoja. Tällöin

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (eli aikaisempi esimerkki)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (todistus harjoitustehtävänä!)
- $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$ (eli äskeinen esimerkki)
- $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$ (myös De Morganin laki)

Russellin paradoksi

Yllä esitettyä joukko-oppia sanotaan naiiviksi, koska sen intuitiivinen ja määrittelemätön joukkokäsite johtaa paradoksiin!

Filosofi Bertrand Russell esitti vuonna 1901 esimerkin:
Olkoon R kaikkien niiden joukkojen joukko, jotka eivät sisällä itseään alkionaan.
Siis: $R = \{A : A \notin A\}$. Onko $R \in R$?
Jos $R \in R$ eli R sisältää itsensä alkionaan, niin R ei toteuta määritelmän ehtoa jolloin $R \notin R$.
Jos taas $R \notin R$ eli R ei sisällä itseään alkionaan, niin toteuttaa määritelmän ehdon jolloin $R \in R$.
Molemmat vaihdoehdot johtivat ristiriitaan!

Bertrand Russell (1872-1970))

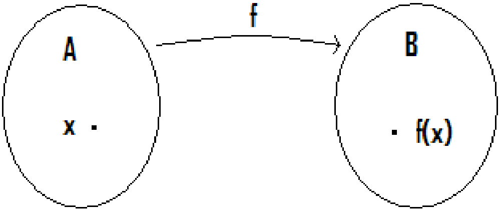
Joukkojen muodostaminen ei siis ole aivan niin vapaata kuin annoimme aluksi ymmärtää. Aksiomaattinen lähestymistapa joukko-oppiin auttaa korjaamaan nämä ongelmat, siinä esimerkiksi itsensä sisältävä "luokka" ei ole joukko.

Funktiot

Funktio on eräs matematiikan tärkeimmistä käsitteistä. Sen voi intuitiivisesti ajatella kuvaavan riippuvuussuhdetta, jossa tarkasteltava suure määräytyy täsmällisesti jostakin muusta suureesta.

Funktion määritelmä

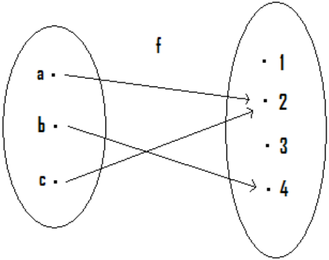
Olkoot A ja B joukkoja.
Funktio eli **kuvaus** f joukolta A joukkoon B, merk. $f : A \to B$, liittää jokaiseen alkioon $x \in A$ täsmälleen yhden alkion $f(x) \in B$.



Sanotaan, että A on f:n **määrittelyjoukko** (tai **lähtöjoukko**) ja B on f:n **maalijoukko**.

Esimerkki funktiosta

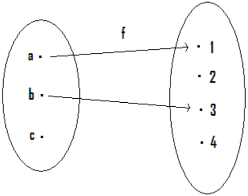
Esim. Olkoon $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Määritellään $f : A \to B$ asettamalla $f(a) = 2$, $f(b) = 4$ ja $f(c) = 2$.
f:n nuolikaavio:

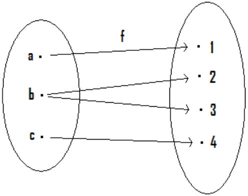


Kuten yllä, kaikkia maalijoukon alkioita ei välttämättä ”saavuteta” (mikään A:n alkio ei kuvaudu B:n alkioille 1 tai 3).
Funktion saavuttamat arvot muodostavat sen **arvojoukon**. Yllä arvojoukko $= \{f(a), f(b), f(c)\} = \{2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\} = B$.

Mikä pielessä?

Mikä on pielessä seuraavissa yrityksissä määritellä funktio $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3, 4\}$?





Funktio $f : A \to B$, liittää jokaiseen alkioon $x \in A$ täsmälleen yhden alkion $f(x) \in B$.

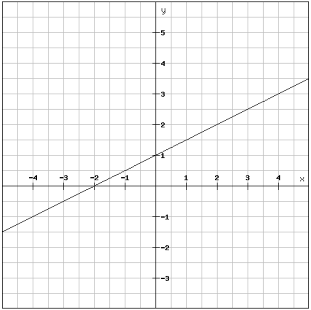
Funktio $f : A \to B$, liittää jokaiseen alkioon $x \in A$ täsmälleen yhden alkion $f(x) \in B$.

Reaalifunktion kuvaaja

Reaalifunktiolla tarkoitetaan funktiota $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tai osajoukolta $A \subset \mathbb{R}$ reaaliluvuille).
Niitä on kätevä havainnollistaa kuvaajalla.

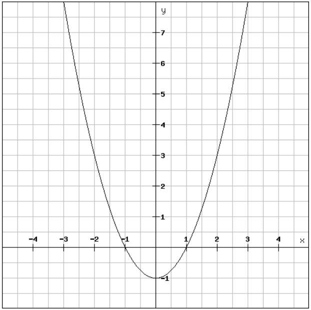
Esimerkkejä funktioiden kuvaajista

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}x + 1$



f:n kuvaaja on kulmakertoimella $\frac{1}{2}$ nouseva suora.

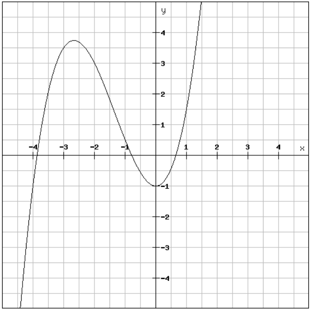
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1$



f:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Esimerkkejä funktioiden kuvaajista

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 1$



f:n kuvaaja on kolmannen asteen käyrä.

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$

Sori, ei kuvaa!

f:n arvot kasvavat (vähenevät) rajatta, kun nollaa lähestytään oikealta (vasemmalta).

Analyysi

Reaalifunktioista, niiden *derivaatoista* ja *integraaleista* enemmän analyysin kursseilla (esim. Analyysi I ja II, Matemaattisen analyysin kurssi, Analyysin virtuaalinen peruskurssi).

Lukumääräfunktio

Vilkaisimme aikaisemmin joukon $\{1, 2, 3\}$ potenssijoukkoa, eli sen kaikkein osajoukkojen joukkoa

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Merkitään tätä joukkoa $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$:lla ja määritellään funktio $\sharp : \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \to \mathbb{N}$, joka liittää jokaiseen näistä osajoukoista sen alkioiden lukumäärän (tarkastelemme tätä käsitettä tarkemmin hetken kuluttua). Siis esim. $\sharp(\{2\}) = 1$, $\sharp(\emptyset) = 0$ ja $\sharp(\{1, 3\}) = 2$. Myös esim.

$$\sharp(\{1, 2\} \cup \{3\}) = \sharp(\{1, 2\}) + \sharp(\{3\}).$$

Tämänkaltaiset joukoilla määritellyt funktiot, jotka jollain tapaa ”mittaavat” joukkojen kokoa, ovat erittäin tärkeitä matemaattisessa analyysissa.