

Inversio = käänteinen, päinvastainen

Inversio-ongelmilla tarkoitetaan (suoran) ongelman ratkaisua "takaperin". Arkipäiväisiä inversio-ongelmia ovat mm. lääketieteellinen röntgentomografia ja epätarkan valokuvan tarkentaminen. Myös avaruuden kappaleiden muodon määrittäminen mm. niiden muihin kappaleisiin kohdistamista vaikutuksista tai muista havainnoista on inversio-ongelma.

Inversio-ongelmat ovat laaja tutkimuskohde Suomessa ja tutkijat ovat saaneet aikaan merkittäviä tuloksia viime vuosina.

Esimerkki - Näkymätön kuu

Tarkastellaan planeettaa ja sitä kiertävää kuuta. Oletetaan, että kuu on niin pieni, ettei sitä nähdä teleskoopilla. Kuitenkin kuun painovoima vaikuttaa planeetan liikkeeseen.

Kun kahden kappaleen massat, sijainnit ja nopeudet tiedetään, voidaan melko helposti määrittää niiden kiertoradat. Liikeratojen määrittäminen tällä tavalla on *suora ongelma*.

Nyt voidaan kuitenkin kysyä *käänteinen* kysymys:

Jos planeetan massa ja liike tiedetään, voidaanko kuun massa ja liikerata laskea? Saadaanko näkymätön kuu "näkyväksi"?

Ongelma - Kiinteän kappaleen sisus

Ongelma: Halutaan "nähdä" kiinteän kappaleen sisälle.

Näkyvä valo heijastuu vain kappaleen pinnasta, eikä anna mitään tietoa kappaleen sisustan koostumuksesta!

Ääniaallot läpäisevät ihmisen. Ruumiin sisällä ääniaallot etenevät eri nopeuksilla eri kudoksissa. Tämä aiheuttaa ääniaaltojen taittumisen ja heijastumisen (vrt. näkyvä valo prismassa).

Asettamalla äänilähde ihoa vasten ja kuuntelemalla kuinka ääni "kaikuu" ruumiin sisällä, voidaan määrittää eri kudostyyppit ja niiden koko (muoto).

Tuttu sovellus on ultraäänen käyttö syntymättömien vauvojen tutkimisessa.

Esimerkki - Röntgensäteet

Valo, jonka aallonpituus on lyhyempi kuin näkyvän valon, läpäisee väliainetta paremmin kuin väkyvä valo.

Lyhyen aallonpituuden omaava valo, kuten röntgensäteet, absorboituvat aineeseen ja siitä syystä valon intensiteetti vähenee sen kulkiessa aineen läpi. Intensiteetin muutos riippuu aineen tiheydestä ja matkasta, jonka valo kulkee (väli)aineessa.

Se, kuinka paljon valon intensiteetti (sen logaritmi) vähenee, riippuu *linearisesti* valon väliaineessa kulkeman matkan pituudesta ja väliaineen tiheydestä. Siis, jos väliaineen tiheys tuplaantuu, intensiteetti puolittuu jne.

Esimerkki: Metallipalkit, joiden tiheydet ovat 250 ja 500 asetetaan röntgensäteiden kulkutielle. Kaikkien röntgensäteiden (lähde)intensiteetti on sama (1000). Palkkien taakse asetetaan vastaanotin, joka mittaa kulkeneen röntgensäteiden intensiteetin. Ensimmäinen röntgensäde kulkee molempien palkkien läpi ja sen intensiteetti vähenee arvoon 250. Toinen säde kulkee vain yhden metallipalkin läpi ja sen intensiteetti on vastaanottimen mukaan 500. Viimeinen röntgensäde ei läpäise metallipalkkeja, joten se ei myöskään menetä osaa intensiteetistään. (Piirrä kuva!)

Röntgentomografia - johdattelu jatkuu

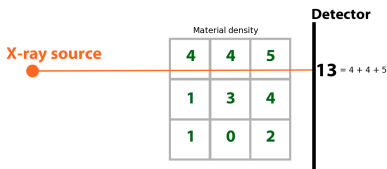
Intensiteetti I_2 vastaanottimessa määräytyy lähteintensiteetistä I_1 seuraavan kaavan mukaan:

$$I_2 = I_1 - L_1 d_1 - L_2 d_2 - \dots - L_n d_n,$$

jossa d_i :t ovat röntgensäteiden "kohtaamat" tiheydet ja L_i :t ovat vastaavat säteiden kulkemien matkojen pituudet.

Kuvittele mielessäsi kappale, joka on muodostettu pienistä neliöistä, joissa kussakin on vakiotiheys. Lähettämällä röntgensäde kappaleen läpi, voidaan neliöiden tiheyksien summat laskea lähte- ja loppuintensiteettien arvojen avulla (tässä matka L_i on sama kaikilla $i = 1, 2, \dots, n$):

$$I_1 - I_2 = L_1 d_1 + L_2 d_2 + \dots + L_n d_n \Leftrightarrow d_1 + d_2 + \dots + d_n = \frac{I_1 - I_2}{L_i}$$

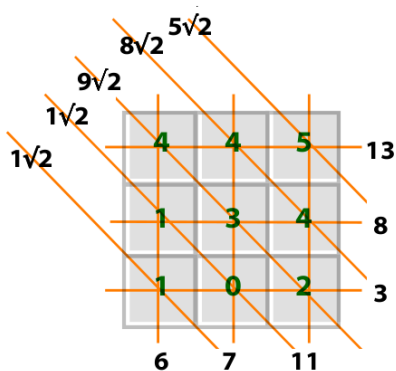


Entäpä jos sen sijaan, että lähettäisimme vain yhden röntgensäteen, lähettäisimmekin useita säteitä ja vieläpä eri suunnista!

Sairaaloissa tehdyt röntgenkuvat on muodostettu tällä tavoin. Yksi röntgenkuva on kokoelma vastaanottimen havaitsemia, eri suunnista tulevien röntgensäteiden intensiteettejä.

Seuraavan sivun kuvassa on hahmoteltu kuinka intensiteettimuutokset muodostuvat; tiheyksien summat merkitty kunkin röntgensädettä kuvaavan viivan päähän.

Röntgentomografia - jatkuu



Diagonaalin suuntaisesti kulkevat säteet kulkevat pidemmän matkan, joten niiden jäljelle jääneet intensiteetit täytyy kertoa $\sqrt{2}$:lla. (Miksi?)

Inversio-ongelman muodostaminen - Esimerkki

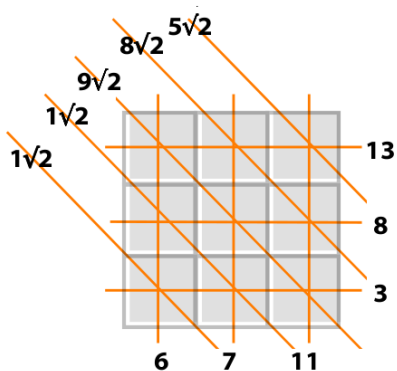
Tilanteeseen liittyvä suora ongelma on seuraavanlainen: Tiedetään kappaleen eri osien tiheydet sekä säteiden kulkemat reitit. Lasketaan valon intensiteettimuutokset haluttuja reittejä (kuvassa viivoja) pitkin.

Muodostetaan vastaava käänteinen ongelma: Oletetaan, että tiedämme vastauksen edellä esitettyyn suoraan ongelmaan, ts. tiedetään vain tiheyksien summat (verrannollisia intensiteettimuutoksiin) viivoja pitkin, mutta ei itse tiheyksiä. Voidaanko määrittää kaikkien neliöiden tiheydet?

Aiemmassa esimerkissä tiheyksien summille saadaan 11 yhtälöä, mutta tuntemattomia on vain 9. Siispä yksikäsitteisen ratkaisun löytäminen on mahdotonta!

Inversio-ongelman ratkaisu - Esimerkki

Kuvassa näkyy kappale, josta tiheyksien arvot on poistettu. Yritä palauttaa tiheyksien arvot - samaan tapaan, kuin Sudokuissa!



Inversio-ongelmien vaikeudet

Inversio-ongelmat ovat yleisesti ottaen hyvin haastavia. Niiden vaikeudet ovat

- ▶ Ratkaisua ei löydy
- ▶ Ratkaisuja on useita
- ▶ Ratkaisufunktio ei ole jatkuva

Kaikilla inversio-ongelmilla on jokin ylläolevista ongelmista!

Kiitos!

Kiitos kaikille kurssilla olijoille!

Hauskoja hetkiä matematiikan parissa myös jatkossa!

Muistakaa antaa palautetta!