Königsbergin sillat

1700-luvun Königsbergin (nykyisen Kaliningradin) läpi virtasi joki, jonka ylitti seitsemän siltaa. Sanotaan, että kaupungin asukkaat yrittivät löytää reittiä, joka lähtisi heidän kotoaan, ylittäisi kaikki seitsemän siltaa täsmälleen kerran ja palaisi kotiin. Reittiä ei tahtonut löytyä. Ongelmaan tarttui matemaatikko Leonhard Euler, joka osoitti reitin olevan mahdoton!

Königsberg 1700-luvulla

Leonhard Euler (1707-1783)

Königsbergin sillat

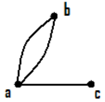
Hän aloitti palauttamalla ongelman ns. graafiksi, jossa pisteet kuvaavat maamassoja ja viivat niitä yhdistäviä siltoja.
Sitten hän päätteli:
Jos haluttu reitti olisi olemassa, niin aina kun tätä reittiä kulkien saavuttaisiin jotakin viivaa pitkin pisteeseen, täytyisi pisteestä poistua toista viivaa pitkin. Siis jokaiseen pisteeseen täytyisi mennä parillinen määrä viivoja. Koska näin ei ole, ei haluttua reittiä ole olemassa. Vaikka tingittäisiin vaatimuksesta, että reitti päättyy kotiovelle (eli sinne mistä lähdettiinkin) täytyisi kahta kotimantereesta eroavia maamassoja yhdistää parillinen määrä siltoja. Tämäkään ei pidä paikkaansa, joten edes tällaista reittiä ei ole olemassa. Tästä sai alkunsa graafiteoria!

Kauppamatkustajan ongelma

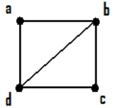
Kauppamatkustaja kiertää kaupungista toiseen kaupustelemassa. Oletetaan, että jokaisesta kaupungista pääsee toiseen ja että kauppamatkustaja tietää kaupunkien väliset etäisyydet. Kuinka hän löytää mahdollisimman lyhyen kerran kussakin kaupungissa käyvän ja lopulta kotiin palaavan reitin? Palataan tähän ongelmaan määriteltyämme graafeihin liittyvät käsitteet hieman tarkemmin.

Määritelmiä

Graafi koostuu äärellisestä määrästä pisteitä, ja niitä yhdistäviä viivoja. Huomaa, että määritelmässämme kahta pistettä voi yhdistää useampi viiva (kuten Königsbergin siltaongelmassa)! Graafia sanotaan **yksinkertaiseksi** mikäli kahta pistettä yhdistää korkeintaan yksi viiva. Kuhunkin pisteeseen menevien viivojen lukumäärää sanotaan tuon pisteen **asteeksi**. Esim.



Tämä graafi ei ole yksinkertainen. Pisteiden a, b ja c asteet: 3, 2, 1. Viivojen lukumäärä 3.

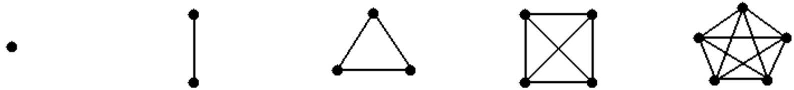


Tämä graafi on yksinkertainen. Pisteiden a, b, c ja d asteet: 2, 3, 2, 3. Viivojen lukumäärä 5.

Huomaa: Kaikkien pisteiden asteiden summa on yhtäsuuri kuin kaksi kertaa viivojen lukumäärä.
Tämä seuraa siitä, että jokainen viiva lisää asteiden summaa kahdella.
Tästä seuraa myös, että asteiden summa on parillinen.

Täydelliset graafit

Täydellinen graafi K_p on yksinkertainen graafi, jossa on p pistettä ja jossa jokaista pisteparia yhdistää viiva.

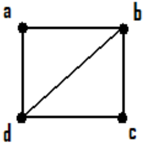


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Koska graafissa K_p jokaisen pisteen aste on $p-1$, toteuttaa viivojen lukumäärä q edellisen huomion nojalla yhtälön $2q = p(p-1)$, eli $q = \frac{1}{2}p(p-1)$.

Kulku graafissa

Kulku tarkoittaa sellaista äärellistä jonoa graafin viivoja, jossa kukin viiva jatkaa siitä mihin edellinen loppui. Yksinkertaisessa graafissa kulkua voidaan kuvata jonolla graafin pisteitä, jossa peräkkäisiä pisteitä yhdistää viiva. Korkeintaan kerran kutakin viivaa kulkevaa kulkua, joka päättyy samaan pisteeseen mistä lähtikin, sanotaan **kierrokseksi**. Kierros graafissa voidaan aina ajatella alkavan mistä tahansa kierroksen pisteestä. Siten ei ole tarvetta tehdä eroa eri pisteistä alkavien, mutta samoja viivoja kulkevien kierrosten välille. Tarkastellaan esimerkiksi yksinkertaista graafia

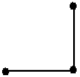


(a, b, c) on eräs kulku
(a, c, b) ei ole kulku, sillä pisteitä a ja c ei yhdistä viiva
(a, b, d, a) on eräs kierros
(a, b, d, a), (b, d, a, b) ja (d, a, b, d) ovat oleellisesti sama kierros
(a, b, c, d, a) on täsmälleen kerran jokaisen pisteen kautta kulkeva kierros

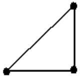
Königsbergin siltaongelma oli siis löytää graafista täsmälleen kerran jokaista viivaa kulkeva kierros. Eulerin päättely osoitti tämän olevan mahdollista mielivaltaisessa graafissa vain jos jokaisen pisteen aste on parillinen. Koska ylläolevassa Königsbergin siltoja kuvaavassa graafissa näin ei ole, ei Königsbergin siltaongelmalla ole ratkaisua.

Puut

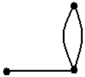
Graafia, jossa jokaista pisteparia yhdistää jokin kulku, sanotaan **yhtenäiseksi**. Sanomme **puuksi** yhtenäistä graafia, jossa ei ole kierroksia. (Puut saatetaan joskus määritellä hieman eri tavoin.) Esim.



puu



ei puu

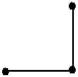


ei puu

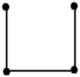
Erityisesti puu on aina yksinkertainen, muuten siinä olisi kierros.

Puut

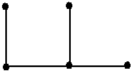
Tarkastellaan muutamia pieniä puita:



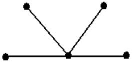
3 pistettä, 2 viivaa



4 pistettä, 3 viivaa



5 pistettä, 4 viivaa



5 pistettä, 4 viivaa

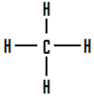
Se, että viivoja on yksi vähemmän kuin pisteitä, riittää itseasiassa ”karakterisoimaan” puut:

Lause

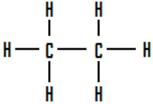
Olkoon T yksinkertainen graafi, jossa on p pistettä. Tällöin T on puu, jos ja vain jos se on yhtenäinen ja siinä on $p - 1$ viivaa.

Alkaanit

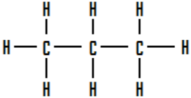
Hiilivetyä (tarkemmin alkaania) C_nH_{2n+2}, missä $n \geq 1$ on luonnollinen luku, esittää yhtenäinen graafi jonka pisteet ovat kyseisen molekyylin atomeja ja viivat sidoksia. Esim.



metaani CH_4



etaani C_2H_6



propaani C_3H_8

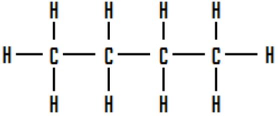
Molekyylin C_nH_{2n+2} graafissa on siis $p = 3n + 2$ pistettä. Jokainen n:stä hiiliatomista on astetta 4, kun taas kaikki $2n + 2$ vetyatomia ovat astetta 1. Kun merkitään viivojen lukumäärää q:lla, saadaan

$$q = \frac{1}{2}(4n + 2n + 2) = 3n + 1 = p - 1,$$

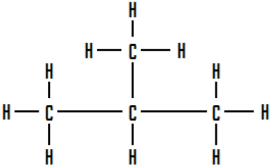
eli kyseinen graafi on puu.

Isomorfisuus

Graafiteoriassa on oleellista graafien isomorfisuuden eli "samanrakenteisuuden" käsite. Kahden graafin sanotaan olevan isomorfiset, mikäli niiden pisteillä on sellainen bijektiivinen vastaavuus, että toisiaan vastaavia pistepareja yhdistää molemmissa graafeissa yhtä monta viivaa. Tähän käsitteeseen perehdytään tarkemmin muilla kursseilla. Huomataan kuitenkin, että hiilivetyä C_4H_{10} vastaa kaksi erirakenteista graafia



butaani C_4H_{10}



isobutaani C_4H_{10}

Painotetut graafit ja kauppamatkustajan ongelma

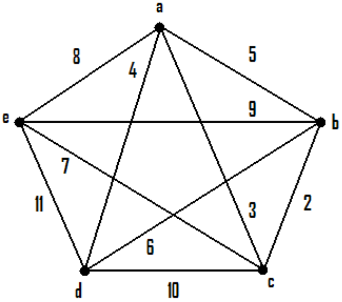
Painotetuksi graafiksi sanomme graafia, jonka jokaiseen viivaan on yhdistetty jokin luku eli "paino", joka voi kuvata esimerkiksi viivan pituutta eli pisteiden etäisyyttä tms. Kauppamatkustajan ongelma voidaan siis p:n kaupungin tapauksessa muotoilla seuraavalla tavalla: Olkoon täydellinen graafi K_p painotettu positiivisilla reaaliluvuilla. Etsi halvin kierros, joka kulkee täsmälleen kerran graafin jokaisen pisteen kautta. Painojen voi ajatella olevan etäisyyksiä, mikäli ne toteuttavat ns. kolmioepäyhtälön:
Kulku suoraan on aina korkeintaan yhtä kallis kuin kiertoteitse. Painojen ei kuitenkaan välttämättä tarvitse kuvata (ajallisia) etäisyyksiä, voihan kauppamatkustaja käyttää erilaisia kulkuyhteyksiä! Esim. lentäen kiertoteitse voi olla perillä nopeammin (tai halvemmin) kuin suoralla junayhteydellä. Ongelman kannalta oleellisesti erilaisia kierroksia on

$$\frac{1}{2}(p-1)\cdot(p-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \quad \text{kappaletta.}$$

Palataan kierrosten lukumäärän laskemiseen ensi viikolla.

Esimerkki

Etsitään halvin kierros graafissa K_5. Tarkasteltavia kierroksia on $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ kappaletta.



(a, b, c, d, e, a) :
$5 + 2 + 10 + 11 + 8 = 36$
(a, b, c, e, d, a) :
$5 + 2 + 7 + 11 + 4 = 29$
$(a, b, d, c, e, a) : 36$
$(a, b, d, e, c, a) : 32$
$(a, b, e, c, d, a) : 35$
$(a, b, e, d, c, a) : 38$
$(a, c, b, d, e, a) : 30$
$(a, c, b, e, d, a) : 29$
$(a, c, e, b, d, a) : 29$
$(a, c, d, b, e, a) : 36$
$(a, d, c, b, e, a) : 31$
$(a, d, b, c, e, a) : 27$

Kierros (a, d, b, c, e, a) on siis halvin. Huomaa, että tarkastellut painot eivät kuvaa etäisyyksiä: $(c, d) : 10$, mutta $(c, b, d) : 2 + 6 = 8$.