

## LUKUALUEET

### Malliratkaisut 2. harjoitukseen, Heikki Koivupalo

#### 1. Laske summat

$$a) (9, 1) + (-9, 4), \quad b) (1, 1) + (11, -1), \quad c) (0, 1) + (131, -10).$$

Ratkaisu.

$$a) (9, 1) + (-9, 4) = (9 + (-9), 1 + 4) = (0, 5),$$

$$b) (1, 1) + (11, -1) = (1 + 11, 1 + (-1)) = (12, 0),$$

$$c) (0, 1) + (131, -10) = (0 + 131, 1 + (-10)) = (131, -9).$$

#### 2. Laske tulot

$$a) (2, -1)(2, 1), \quad b) (5, 7)(3, 3).$$

Ratkaisu.

$$a) (2, -1)(2, 1) = (2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1, 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2) = (5, 0),$$

$$b) (5, 7)(3, 3) = (5 \cdot 3 - 7 \cdot 3, 5 \cdot 3 + 7 \cdot 3) = (-6, 36).$$

#### 3. Laske tulot

$$a) (-1, 1)(3, -1), \quad b) (1, -1)^2, \quad c) (1, 1)(6, 1)^2.$$

Ratkaisu.

$$a) (-1, 1)(3, -1) = (-1 \cdot 3 - 1 \cdot (-1), -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3) = (4, 4),$$

$$b) (1, -1)^2 = (1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1), 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1) = (0, -2),$$

$$c) (1, 1)(6, 1)^2 = (1, 1)(6 \cdot 6 - 1 \cdot 1, 6 \cdot 1 + 1 \cdot 6) = (1, 1)(35, 12) \\ = (1 \cdot 35 - 1 \cdot 12, 1 \cdot 12 + 1 \cdot 35) = (23, 47).$$

4. Ratkaise yhtälö  $3p + (1, -1) = (0, 3) + (7, 2), p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}3p + (1, -1) &= (0, 3) + (7, 2) \\ &\Leftrightarrow \\3p + (1, -1) &= (7, 5) \\ &\Leftrightarrow \\3p &= (7, 5) - (1, -1) \\ &\Leftrightarrow \\3p &= (6, 6) \\ &\Leftrightarrow \\p &= (2, 2).\end{aligned}$$

5. Määritä vektorien  $(1/2, \sqrt{3}/2)$  ja  $(-6, 2\sqrt{3})$  välinen kulma.

Ratkaisu. Lasketaan vektorien kulmat suhteessa  $x$ -akseliin pituuksien avulla, minkä jälkeen lasketaan saatujen kulmien erotus.

Olkoon  $(1/2, \sqrt{3}/2) = a$  ja  $(-6, 2\sqrt{3}) = b$ .

Pituudet:

$$\begin{aligned}r_a &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \\ r_b &= \sqrt{(-6)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Kulmat:

$$\begin{aligned}\cos \varphi_a &= \frac{1}{2} & \cos \varphi_b &= \frac{-6}{4\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow & &\Leftrightarrow \\ \varphi_a &= 60^\circ, & \varphi_b &= 150^\circ.\end{aligned}$$

Koska kummankin vektorin  $y$ -koordinaatti on positiivinen, vektorien välinen kulma on  $150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$ .

6. Määritä ne tason pisteet  $p$ , joiden etäisyys pisteistä  $(2, 0)$  ja  $(0, 2)$  on yhtä suuri, eli  $|p - (2, 0)| = |p - (0, 2)|$ .

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} |(x, y) - (2, 0)| &= |(x, y) - (0, 2)| \\ \Leftrightarrow |(x - 2, y)| &= |(x, y - 2)| \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} &= \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \\ \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 &= x^2 + (y - 2)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 &= x^2 + y^2 - 4y + 4 \\ \Leftrightarrow x &= y. \end{aligned}$$

Etsityt pisteet löytyvät siis suoralta  $y=x$ .