Lukualueet

Lotta Oinonen, Petri Ola
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
00014 Helsingin yliopisto

Johdanto. Tämä kurssi on lyhyt johdatus kompleksilukujen alkeisominaisuuksiin siinä laajudessa kuin niitä tarvitaan cum laude–kursseilla lineaarialgebra ja differentiaaliyhtälöt. Se sopii myös mainiosti sisällytettäväksi opettajan opintoihin. Kompleksilukujen tuntemus kuuluu jokaisen matemaatikon yleissivistykseen, ja niillä on keskeinen asema monissa tärkeissä matematiikan sovelluksissa. Tällä kurssilla emme kuitenkaan perehdy näihin sovelluksiin, edes esimerkein. Tarkoituksena on ainoastaan antaa lukijalle perustaidot kompleksiluvuilla laskemiseen sekä tuntuma niiden geometriseen merkitykseen.

Merkinnät noudattavat vakiintunutta käytäntöä, ja loppuun on lisätty lyhyt kirjallisuusluettelo. Siihen on poimittu viitteitä, joissa historiallisia kysymyksiä on käsitelty perusteellisemin kuin tässä luentomonisteessa. Lisäksi on muutama työ, joista on mahdollista löytää lisämateriaalia kurssilla käsiteltyihin asioihin. Kurssin esitiedoiksi riittää lukion pitkän matemaatiikan oppimäärä. Oletan kuitenkin, että lukija seuraa samanaikaisesti lineaarialgebran alkeiskurssia.

0.1. Joukko-opin merkinnät. Ennen varsinaiseen asiaan siirtymistä kertaamme lyhyesti joukko-opin perusmerkinnät. Jos X on jokin annettu joukko[1], ja A ja B sen osajoukkoja, eli merkitsemme $A \subset X$ ja $B \subset X$, niin niiden *yhdiste* on joukko

$$A \cup B = \{x \in X;\ x \in A \text{ tai } x \in B\}.$$

Eli alkio x kuuluu yhdisteeseen jos se kuulu jompaankumpaan joukoista A tai B. Osajoukkojen A ja B *leikkaus* on joukko

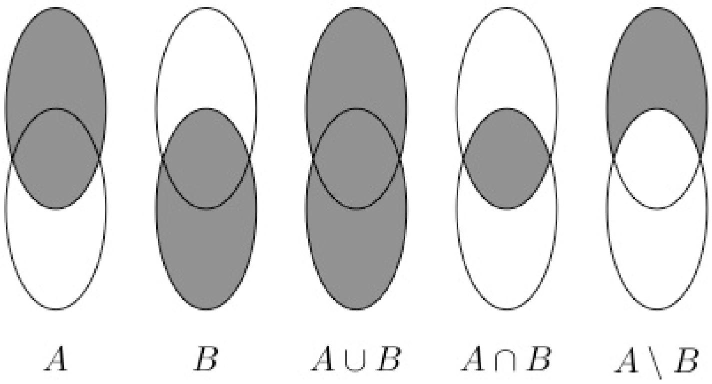
$$A \cap B = \{x \in X;\ x \in A \text{ ja } x \in B\}.$$

[1] Voit ajatellea esimerkiksi reaalilukujen joukkoa, eli lukusuoraa

Siten alkio x kuuluu leikkaukseen, jos se kuuluu sekä joukkoon A että joukkoon B. Joukkojen A ja B *erotus* on joukko

$$A \setminus B = \{x \in X;\ x \in A \text{ ja } x \notin B\}.$$

Erotukseen $A \setminus B$ kuuluvat siten kaikki ne joukon A alkiot jotka eivät kuulu joukkoon B.



Edelleen, osajoukon A *komplementti* on

$$A^c = X \setminus A = \{x \in X;\ x \notin A\}.$$

Osajoukon A komplementti koostuu siis kaikista niistä joukon X alkioista, jotka eivät kuuluu joukkoon A. Yhdisteen, leikkauksen ja komplementin sitovat toisiinsa *De Morganin* lait:[2]

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$

eli *yhdisteen komplementti on komplementtien leikkaus*, ja

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

eli *leikkauksen komplementti on komplementtien yhdiste*. Näiden paikkansa pitävyydestä on helppo vakuuttua piirtämällä kuva ja ne on myös helppo todistaa. De Morganin lait yleistyvät myös mielivaltaisille leikkauksille ja yhdisteille, kuten todistetaan algebran kurssilla.

[2] *Augustus De Morgan* (1806-1871) oli matemaattinen loogikko, joka otti näiden lakien yleistykset käyttöön klassisessa propositiologiikassa. Eri muodoissaan ne olivat kuitenkin tuttuja jo Aristoteleelle ja keskiajan loogikoille.

1. Reaaliluvut. Tässä osiossa kertaamme tutut lukualueet luonnollisista luvuista reaalilukuihin kiinnittäen huomiota siihen, minkä takia jokainen laajennus on hyödyllinen. Aloitamme luonnollisilla luvuilla.

1.1. Luonnolliset luvut. Luonnollisten lukujen joukko on

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

ja mikäli lisäämme mukaan nolla-alkion, saamme *ei-negatiivisten kokonaislukujen joukon*

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Jokaisella on varmaan vankka intuitiivinen käsitys joukosta $\mathbb{N}$. Luonnollista lukua on helppo ajatella sopivan lukumäärän kautta, ja tarvittaeesa vaikka laskea sormin. Matemaatikoille tämä ei kuitenkaan anna käyttökelpoista määritelmää. On olemassa erilaisia tapoja määritellä aksiomaattisesti joukot $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{N}_0$, esimerkiksi *Peanon aksiomien avulla*. Tähän emme kuitenkaan nyt ryhdy, vaan kiinnostuneet voivat palata asiaan algebran ja matemaattisen logiikan kursseilla.

Luonnollisilla luvuilla on määritelty kaksi luonnollista laskutoimitusta: yhteenlasku $'+'$ ja kertolasku $'\cdot'$. Nämä laskutoimitukset johdattavat meidät välittömästi kahteen eri yhtälöön. Ensinnäkin, onko olemassa sellaista luonnollista lukua x, että annetuilla luonnollisilla luvuilla m ja n pätee

$$m + x = n. \tag{1.1.1}$$

Vastaava yhtälö tulolle on

$$mx = n, \tag{1.1.2}$$

missä olemme jättäneet tavanomaiseen tapaan kertolaskun pisteen merkitsemättä. Kumpikaan näistä yhtälöistä ei ole ratkeava luonnollisten lukujen joukossa ilman lisäoletuksia.

1.2. Kokonaisluvut. Tarkastellaan aluksi yhtälöä (1.1.1). Kuten helposti huomataan, yhtälöllä on ratkaisu joukossa $\mathbb{N}$, mikäli $m < n$, ja vastaavasti joukossa $\mathbb{N}_0$, mikäli $m \leq n$. Mikäli haluamme muissa tilanteissa löytää aina ratkaisun, päädymme *kokonaislukujen joukkoon*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Uskoisin, että jokainen lukija on tuttu tämän joukon kanssa, mutta intuition muodostaminen negatiivisista kokonaisluvuista on jo hiukan hankalampaa:

niitä voi ajatella vaikka velkana, jos on tottunut samaistamaan luonnolliset luvut eurojen kanssa, tai vaikka askeleina: ajatellaan, että seisot hyvin pitkissä portaissa. Jokainen askel eteenpäin vastaa lukua yksi, ja jokainen askel taaksepäin lukua miinus yksi. Matemaattisesti kokonaisluvut voidaan määritellä suoraan luonnollisten lukujen erotuksina, kuten algebran kurssilla tehdään[3] .

Yhtälö (1.1.1) on siis aina ratkeava kokonaislukujen joukossa. Entäs yhtälö

$$mx = n$$

kun m ja n ovat kokonaislukuja? Selvästi tällä ei aina ole ratkaisua $x \in \mathbb{Z}$. Tämä johtaa meidät seuraavaan lukukäsitteen laajennukseen.

1.3. Rationaaliluvut. Yllä olevalla yhtälöllä on aina ratkaisu (olettaen että $m \neq 0$) rationaalilukujen joukossa

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n};\, m,\, n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0\}.$$

Rationaaliluvuilla on edelleen määritelty sekä yhteen– että kertolasku kaavoilla

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2},$$

ja

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}.$$

Tarkastellaan ensimmäisen asteen polynomiyhtälöä kokonaislukukertoimin a_0 ja a_1,

$$a_1 x + a_0 = b, \tag{1.3.1}$$

missä myös $b \in \mathbb{Z}$. Oletetaan, että $a_1 \neq 0$. Tällöin sen nojalla, mitä olemme yllä kertoneet, tällä on aina ratkaisu $x \in \mathbb{Q}$, joka on yksikäsitteinen. Tämä pätee edelleen, vaikka sallisimme rationaalikertoimet. Emme nyt puutu siihen, kuinka rationaalilukujen tarkaa määrittely tehdään[4], sensijaan yleistämme yhtälöä (1.3.1) seuraavasti:

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = b, \tag{1.3.2}$$

[3] Hieman tarkemmin, jos luonnollisille luvuille m_1, n_1, m_2 ja n_2 pätee $m_1 - n_1 = m_2 - n_2$, niin yhtäpitävästi $m_1 + n_2 = m_2 + n_1$. Kokonaisluvut voidaan siis ajatella pareina luonnollisia lukuja (m, n) kunhan samaistamme keskenään kaikki parit (m_1, n_1) ja (m_2, n_2) joille pätee $m_1 + n_2 = m_2 + n_1$. Osaatko sanoa, mitkä parit vastaavat tällöin lukua nolla?

[4] Rationaaliluvut voidaan määritellä seuraavasti: jos m_1, m_2, n_1 ja n_2 ovat kokonaislukuja ja n_1, $n_2 \neq 0$, niin $m_1/n_1 = m_2/n_2$ jos ja vain jos $m_1 n_2 = m_2 n_1$. Voimme siis määritellä $\mathbb{Q}$:n kokonaislukuparien (m, n) joukkona missä samaistamme parit (m_1, n_1) ja (m_2, n_2) joilla $m_1 n_2 = m_2 n_1$. Osaatko nyt sanoa, mitkä parit vastaavat lukua yksi?

missä $a_2 \neq 0$. Oletetaan edelleen että kertoimet a_i ja b ovat kokonaislukuja. Onko yhtälöllä (1.3.2) aina olemassa rationaalinen ratkaisu x? Tutkitaan vaikka kuuluisaa[5] yhtälöä

$$x^2 = 2. \tag{1.3.3}$$

On helppo nähdä, ettei tällä ole rationaalista ratkaisua. Osoitetaan tämä:

Olkoon nyt $x = p/q$, missä oletamme ettei p:llä ja q:lla ole yhteistä tekijää, ja että molemmat ovat positiivisia. Osaatko sanoa, miksi voimme aina olettaa positiivisuuden? Jaottomuuden voimme aina järjestää supistamalla tarvittaessa kaikki yhtiset tekijät pois. Tällöin $x^2 = p^2/q^2$, ja yhtälö (1.3.3) voidaan kirjoittaa yhtäpitävään muotoon

$$p^2 = 2q^2. \tag{1.3.4}$$

Osoitetaan nyt, että tästä yhtälöstä seuraa että p on jaollinen kahdella, eli parillinen. Tarvitsemme tähän seuraavaa epätriviaalia kokonaislukujen ominaisuutta: jokainen kokonaisluku $m > 1$ voidaan esittää yksikäsitteisellä tavalla tulona

$$m = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k},$$

missä potenssit n_l ovat ei–negatiivisia kokonaislukuja, ja luvut $p_l > 1$ ovat alkulukuja, eli luonnollisia lukuja, jotka ovat jaollisia ainoastaan itsellään ja ykkösellä. Tehdään vastaoletus: p ei ole jaollinen kahdella. Tällöin joillain alkuluvuilla p_l ja luonnollisilla luvuilla n_l on

$$p = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k},$$

missä $p_l \neq 2$ kaikilla l. Siten

$$p^2 = p_1^{2n_1} \cdots p_k^{2n_k},$$

ja p^2 ei ole parillinen sillä $p_l \neq 2$ kaikilla l. Tämä on ristiriita, sillä yhtälön (1.3.4) nojalla p^2 on parillinen.

Palataan nyt yhtälöön (1.3.4). Edellä osoitetun nojalla p on parillinen, ja siten p^2 on jaollinen neljällä, ja voimme supistaa yhtälön (1.3.4) molemmin puolin, ja saamme uuden yhtälön

$$2p'^2 = q^2, \quad p = 2p'.$$

Samoin kuin edellä tämä implikoi että myös q on jaollinen kahdella, joka on ristiriita sen kanssa että luvuilla p ja q ei ole yhteistä tekijää. $\square$

[5] Tarinan mukaan tämä yhtälö järkytti suuresti Pythagoraan mielenrauhaa.

1.4. Reaalilukujen joukko. Reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ tarkka konstruointi tehdään algebran kurssilla, ja sivuutamme sen. Intuitiivisesti ajatelleen jokaisen reaaliluvun määrää ääretön desimaalikehitelmä

$$\pm m_o, m_1 m_2 m_3 \ldots,$$

missä $m_i \in \mathbb{N}_0$. Yhdellä pisteellä voi olla useampia kuin yksi desimaalikehitelmä, esimerkiksi

$$0,999999\ldots, \quad 1,000000000\ldots$$

vastaavat samaa reaalilukua, nimittäin ykköstä. Reaalilukujen joukkoa voi ajatella lukusuorana, kontinuumina, jossa jokainen piste vastaa yhtä reaalilukua. Jokainen rationaaliluku on tietenkin reaaliluku, eli $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, mutta joukko $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, eli *irrationaailukujen joukko*, ei ole tyhjä: kuten yllä näimme yhtälön (1.3.3) positiivinen ratkaisu $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku[6]. Mikäli haluamme ratkaista kaikki polynomiyhtälöt, ei tämä kuitenkaan riitä. Esimerkikisi yhtälöllä

$$x^2 = -1 \tag{1.4.1}$$

ei ole ratkaisua reaalilukujen joukossa, sillä reaaliluvun neliö on aina ei–negatiivinen. Lukukäsitteen laajentaminen siten, että yhtälöllä (1.4.1) on ratkaisu, johtaa kompleksilukuihin.

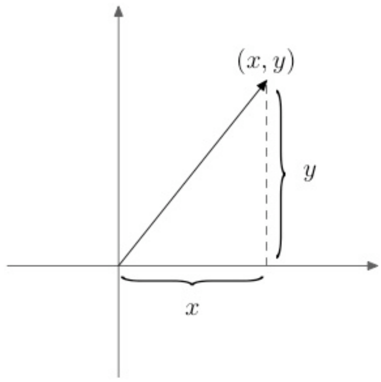
2. Kompleksilukujen konstruointi ja perusominaisuudet. Reaalilukujen laajennus kompleksiluvuiksi on mahdollista tehdä käyttäen tuttua xy–tasoa $\mathbb{R}^2$, jossa on jo entuudestaan määritelty kahden pisteen, eli tasovektorin, summa. Olennaista on määritellä sinne myös reaalilukujen kertolaskun laajennus.

2.1. Taso $\mathbb{R}^2$. Tarkastellaan kaikkien reaalisten pisteparien muodostamaa joukkoa

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y);\ x,\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Tason pisteitä on mahdollista ajatella myös origosta $(0, 0)$ alkavina vektoreina.

[6] Joukko $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on itseasiassa huomattavasti suurempi kuin $\mathbb{Q}$: algebran kurssilla osoitetaan että joukot $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Q}$ ovat yhtä suuria siinä mielessa että ne voidaan kuvata bijektiivisesti toisilleen, eli ne ovat *numeroituvia*. Sekä $\mathbb{R}$ että irrationaalilukujen joukko sensijaan ovat *ylinumeroituvia*.



Pisteen $p = (x, y)$ *etäisyys* origosta on Pythagoraan lauseen nojalla

$$|p| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Piste $p = (x, y)$ voidaan kertoa reaaliluvulla μ käyttäen kaavaa

$$\mu p = (\mu x_1, \mu x_2),$$

eli jokainen koordinaatti kerrotaan erikseen. Samoin kahden pisteen $p_1 = (x_1, y_1)$ ja $p_2 = (x_2, y_2)$ *summa* määritellään tuttuna lausekkeena

$$p_1 + p_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Tämä vastaa siis pisteiden p_1 ja p_2 määrämien tasovektorien summavektoria. Tällä yhteenlaskulla on seuraavat itsestään selvät, mutta silti tärkeät, ominaisuudet[7]:

- **Nolla–alkio.** Origoa vastaava piste $(0, 0)$ on yhteenlaskun nolla–, eli neutraalialkio. Toisn sanoen kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pätee

$$(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y).$$

- **Kommutatiivisuus.** Jos (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1).$$

- **Liitännäisyys.** Jos (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$, ovat kolme mielivaltaista tason pistettä, niin

$$((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)).$$

  Toisin sanoen termit saa summata missä jarjestyksessä haluaa.

[7]Näitä ominaisuuksia ei ehkä osaa arvostaa ennenkuin joutuu tekemisiin laskutoimitusten kanssa, joille ne eivät päde. Esimerkiksi vektorianalyysista tuttu ristitulo ei toteuta liitännäisyyttä, ja matriisikertolasku ei ole kommutatiivinen.

Lopuksi huomatus siitä, kuinka tulkitsemme reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ osaksi tasoa $\mathbb{R}^2$: samaistamme reaaliluvun x tason pisteen $(x, 0)$ kanssa. Toisin sanoen upotamme lukusuoran tasoon x–akseliksi. Matemaattisesti tämä ei ole suinkaan ainoa mahdollisuus, tosin ehkä intuitiivisesti luontevin. Voisimme yhtä hyvin samaistaa $\mathbb{R}$:n y–akselin, tai minkä tahansa origon kautta kulkevan suoran kanssa.

2.2. Kertolasku. Tähän mennessä emme ole tehneet tason pisteillä mitään, mikä ei olisi jo vektorigeometriasta tuttua. Jotta saisimme lukualuelaajennuksen tehdyksi, on osattava määritellä kertolasku tason pisteille, siten että se jatkaa reaalilukujen kertolaskun. Tämä saadaan aikaan seuraavalla tavalla. Jos (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) ovat tason pisteitä, niin määritellään niiden *tulo* kaavalla

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \tag{2.2.1}$$

Tässä vaiheessa ei kannata vielä liika miettiä ylläolevan määritelmän syvintä sisältöä. Tärkeintä on, se että antaa mahdollisuuden ratkaista yhtälö $z^2 = -1$, kuten aivan pian näemme[8]. Varmistutaan ensin, että tämä määritelmä on yhteensopiva reaalilukujen kertolaskun kanssa. Olkoot $y_1 = y_2 = 0$, eli tarkastellaan pisteitä $(x_1, 0)$ ja $(x_2, 0)$. Kuten olemme jo huomauttaneet samaistamme nämä pisteet reaalilukujen x_1 ja x_2 kanssa. Nyt

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2 - 0 \cdot 0, x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0) = (x_1x_2, 0),$$

eli reaaliluku x_1x_2 kuten halusimme. Olkoot nyt puolestaan $x_1 = x_2 = 0$. Tällöin

$$(0, y_1) \cdot (0, y_2) = (0 \cdot 0 - y_1y_2, 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_1) = (-y_1y_2, 0),$$

eli lopputulos on jälleen reaaliluku, mutta nyt $-y_1y_2$. Erityisesti valitsemalla $y_1 = y_2 = 1$ ja merkitsemällä

$$i = (0, 1),$$

samme

$$i^2 = -1.$$

Lukua i kutsutaan *imaginaariyksiköksi.* Olemme siis löytäneet ratkaisun tasossa yhtälölle

$$z^2 = -1,$$

itse asiassa kaksi ratkaisua, sillä myös piste $-i = (0, -1)$ toteuttaa tämän yhtälön. Näin määritellyllä kertolaskulla on seuraavat hyödylliset ominaisuudet:

[8]Osiossa neljä annamme geometrisen tulkinnan yllä määritellylle kertolaskulle.

- **Kommutatiivisuus.** Jos (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, niin pätee

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1).$$

  Tämä seuraa suoraan reaalillukujen vastaavista ominaisuuksista.

- **Assosiatiivisuus**. Jos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$, niin kertolaskut voi suorittaa missä järjestyksessä haluaa, eli

$$((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)).$$

  Tämän todistuksen jätämme harjoitustehtäväksi.

- **Osittelulait** Samoin jätämme harjoitustehtäviksi todistaa osittelulait, jotka liittävät kertolaskun ja yhteenlaskun toisiinsa: jos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$, niin aina pätee

$$((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) + (x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3),$$

  eli voimme tavalliseen tapaan kertoa sulut auki.

Voimme siten laskea tason pisteillä paljolti samaan tapaan kuin reaaliluvuilla. Käänteisalkion olemassaoloon kertolaskussa palaamme hieman myöhemmin.

2.3. Reaali– ja imaginaariosa. Käyttämällä hyväksi imaginaariyksikköä $i = (0, 1)$ ja edellä esitettyja laskusääntöjä voimme kirjoittaa pisteen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ muotoon

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y(0, 1) = x + iy,$$

ja tällä merkinnällä yhteenlasku saa muodon

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{2.3.1}$$

ja kertolasku muodon

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + (iy_1)(iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1), \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

sillä $i^2 = -1$.

Asetamme nyt seuraavan määritelmän.

Määritelmä 2.3.1. *[Kompleksitaso] Taso* $\mathbb{R}^2$ *varustettuna kaavan* (2.3.1) *määräämällä yhteenlaskulla ja kaavan* (2.3.2) *määräämällä tulolla on* kompleksitaso*, ja käytämme siitä merkintää* $\mathbb{C}$*. Sen alkiot ovat muotoa*

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{2.3.3}$$

olevia kompleksilukuja, ja esityksessä (2.3.3) *yksikäsitteiset reaaliluvut* x *ja* y *ovat vastaavasti kompleksiluvun* z *reaali– ja imaginaariosa. Merkitsemme näitä*

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Jos kompleksiluvulla z *on* $\operatorname{Re} z = 0$*, sanomme sitä* puhtaasti imaginaariseksi luvuksi*, ja vastaavasti, jos* $\operatorname{Im} z = 0$*, on* z *reaaliluku.*

Katsotaan seuraavaa yksinkertaista esimerkkiä: olkoot $z_1 = 1 + i$ ja $z_2 = 1 - 2i$. Tällöin

$$z_1 + z_2 = 2 - i,$$

ja erotus

$$z_1 - z_2 = i - (-2i) = 3i$$

on puolestaan puhtaasti imaginaarinen. Tulo on

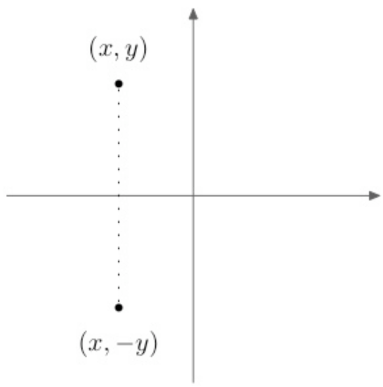
$$z_1 z_2 = (1 + i)(1 - 2i) = 1 - 2i + i - 2i^2 = 3 - i.$$

3. Liittoluku ja käänteisalkio Liittoluvun ottaminen kompleksiluvusta on laskutoimitus, jolla ei ole vastinetta reaalilukujen joukossa, ja sen avulla on mahdollista ratkaista tyylikkäästi monia kompleksilukuihin liittyviä ongelmia.

3.1. Liittoluku. Jos $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, niin määrittelemme että z:n *liittoluku* on

$$\overline{z} = x - iy,$$

eli muutamme vain imaginaariosan merkin. Tällä operatiolla on yksinkertainen geometrinen tulkinta: piste (x, y) peilataan x–akselin suhteen pisteeksi $(x, -y)$.



Liittoluvun muodostamisella on seuraavat perusominaisuudet.

1. Jos z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, niin $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$.

   Todistus: Kirjoitetaan z_1 ja z_2 reaali– ja imaginaariosien avulla

   $$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

   Tällöin

   $$\overline{z_1 + z_2} = \overline{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)} = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \overline{z}_1 + \overline{z}_2. \quad \square$$

2. Jos z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, niin $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$.

   Todistus: Nyt $z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$, joten

   $$\overline{z_1 z_2} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

   Toisaalta

   $$\begin{aligned} \overline{z}_1 \overline{z}_2 &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

   Tämä todistaa väitteen. $\square$

3. Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee $\overline{\overline{z}} = z$, eli liittoluvun littoluku on alkuperäinen kompleksiluku. Käyttäen geometrista tulkintaa tämä on tietysti itsetään selvää, mutta laskennallinen todistus on lähes yhtä ilmeinen.

   Todistus. Olkoon $z = x + iy$. Tällöin

   $$\overline{\overline{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z. \quad \square$$

4. Jos $\operatorname{Im} z = 0$, eli $z = x \in \mathbb{R}$, niin $\overline{z} = z$. Eli reaaliluvun liittoluku on luku itse. Toisaalta, jos $z = x + iy$ ja pätee $\overline{z} = z$, niin myös $x + iy = x - iy$ ja siis $2iy = 0$. Tämä on mahdollista vain jos $y = 0$. (Mieti miksi!) Eli vain ja ainoastaan reaaliluvut kuvautuvat itselleen liittolukukuvauksessa.

5. Olkoon $z = x + iy$. Nyt

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 - ixy + ixy = x^2 + y^2,$$

eli pisteen (x, y) etäisyys origosta voidaan lausua muodossa $\sqrt{z\overline{z}}$. Tämä on erittäin hyödyllinen ominaisuus. Kutsumme lukua $\sqrt{z\overline{z}}$ kompleksiluvun z *moduliksi*, ja käytämme siitä merkintää $|z|$.

3.2. Käänteisalkio. Tutkimme nyt seuraava kysymystä: jos $z = x + iy \in \mathbb{C}$, niin milloin on olemassa kompleksiluku $w \in \mathbb{C}$ siten että

$$zw = 1? \tag{3.2.1}$$

Koska kertolasku on kommutatiivinen, niin tällöin myös $wz = 1$. Jos $\operatorname{Im} z = y = 0$, on vastaus tietenkin selvä: aina kun $x \neq 0$, on olemassa ehdon (3.2.1) toteuttava luku w, se on itseasiassa reaaliluku $1/x$.

Tutkitaan nyt yleistä tilannetta, ja oletetaan että yhtälössä (3.2.1) luku z on $\neq 0$. Kertomalla se puolittain liittoluvulla $\overline{z}$ saamme yhtälön

$$\overline{z}zw = \overline{z},$$

ja koska $0 \neq \overline{z}z = |z|^2 \in \mathbb{R}$ voimme ratkaista

$$w = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Suoralla laskulla näemme nyt että todellakin

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1.$$

Luku $\overline{z}/|z|^2$ on siis luvun z käänteisluku, ja käytämme siitä merkintää z^{-1} tai $1/z$. Jos $z = x + iy$ on z:n esitys reaali- ja imaginaariosien avulla saamme käänteisluvun reaali- ja imaginaariosiksi

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{Im}\frac{1}{z} = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Hieman myöhemmin annamme käänteisluvun muodostamiselle yksinkertaisen geometrisen määritelmän.

Esimerkki 3.2.1. (a) Lasketaan luvun $1+i$ käänteisalkio:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}.$$

(b) Samalla tavalla voimme laskea

$$\frac{1}{1/\sqrt{2}-i/\sqrt{2}} = \frac{1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2}}{(1/2+1/2)} = 1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2}.$$

Eli tässä tilanteessa käänteisalkio on itseasiassa suoraan liittoluku. Osaatko sanoa, mistä tämä johtuu?
(c) Triviaalisti $1/i = -i$.

Käänteisluvun ja liittoluvun välillä on seuraava yhteys: *käänteisluvun liittoluku on liittoluvun käänteisluku*, eli symbolein

$$\overline{(z^{-1})} = (\overline{z})^{-1}.$$

Todistetaan tämä suoralla laskulla:

$$\overline{(z^{-1})} = \frac{\overline{\overline{z}}}{z\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}z} = (\overline{z})^{-1}. \quad \square$$

Käänteisluvun olemassaololla on tärkeä seuraus[9]. Jos

$$zw = 0$$

ja jompikumpi kompleksiluvuista, esimerkiksi $z \neq 0$, niin tällöin $w = 0$. Tämä nähdään kertomalla yllä oleva yhtälö puolittain luvulla z^{-1}.

Viimeinen huomautus koskee muotoa

$$\frac{a+ib}{c+id}, \quad c+id \neq 0$$

olevia kompleksilukuja. Tämä merkintä tarkoittaa tietysti tuloa $(a+ib)(c+id)^{-1}$, ja voimme siis laskea

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \frac{ac-bd+i(cb-ad)}{c^2+d^2}.$$

[9] Algebrallisin termein tämä osoittaa, että kompleksilukujen joukko on *kokonaisalue*.

4. Kompleksiluvun napaesitys ja Moivren kaava Tason pisteille on perinteisen karteesisen xy–koordinaattiesityksen lisäksi olemassa toinen usein käytetty esitys, napakoordinaatit. Tässä piste parametrisoidaan antamalla sen etäisyys origosta, ja positiivisen x–akselin kanssa mudostuva kulma, luonnollisesti radiaaneissa lausuttuna. Koska olemme samaistaneet joukon $\mathbb{C}$ tason pisteiden kanssa, voimme esittää myös jokaisen kompleksiluvun napakoordinaateissa. Tämä esitys on usein erittäin hyödyllinen.

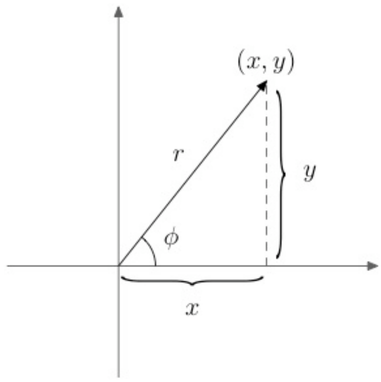
4.1. Napakoordinaatit. Olkoon (x, y) tason piste. Tällöin sen etäisyys origosta on

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

ja kulma ϕ, jonka se muodostaa positiivisen x–akselin kanssa, saadaan ehdoista

$$r \cos \phi = x, \quad r \sin \phi = y,$$

kuten allaolevasta kuvasta käy ilmi. Kutsumme tätä kulmaa *argumentiksi.*



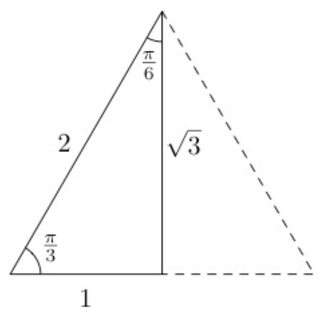
Jos $(x, y) = 0$ ei argumentti ϕ ole tietenkään yksikäsitteisesti määrätty, vaan mikä tahansa ϕ:n arvo käy. Mikäli $(x, y) \neq 0$, on argumentti määrätty yksikäsitteisesti täysiä kierroksia, eli luvun 2π kokonaislukumonikertoja, vaille. Usein valitsemme argumentin väliltä $[0, 2\pi)$ tai $(-\pi, \pi]$.

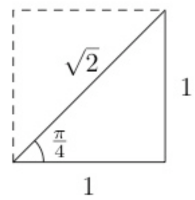
Olkoon nyt $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Koska napakooridnaateissa $x = r \cos \phi$ ja $y = r \sin \phi$, niin

$$z = x + iy = r(\cos \phi + i \sin \phi) = |z| (\cos \phi + i \sin \phi),$$

sillä $r = |z|$. Tätä kutsutaan kompleksiluvun z *napaesitykseksi.*

Esimerkki 4.1.1. *[]* Tarkastellaan seuraavia esimerkkejä. Näitä varten kannattaa palauttaa mieliin seuraavat muistikolmiot.





1. Olkoon $z = 1 + i$. Tällöin
$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$
Argumentti ϕ määräytyy yhtälöistä
$$\cos\phi = 1/\sqrt{2} = \sin\phi,$$
eli $\phi = \pi/4$. Siten
$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

2. Olkoon $z = 6i$. Tällöin $|z| = 6$, ja argumentille saadaan yhtälöt
$$\cos\phi = 0, \quad \sin\phi = 1,$$
eli $\phi = \pi/2$, ja
$$z = 6i\sin\frac{\pi}{2}.$$

3. Olkoon $z = -i$. Tällöin $|z| = 1$, ja argumentti ϕ toteuttaa
$$\cos\phi = 0, \quad \sin\phi = -1$$
eli $\phi = 3\pi/2$. Siten
$$z = i\sin\frac{3\pi}{2}.$$

4. Olkoon lopuksi $z = -2 + i2\sqrt{3}$. Tällöin
$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2 \cdot 3} = \sqrt{16} = 4,$$
ja argumentille saadaan
$$\cos\phi = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \quad \sin\phi = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
joten $\phi = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$, ja siten
$$z = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}).$$

4.2. Laskutoimitukset napaesityksessä. Katsotaan nyt, miltä kompleksilukujen peruslaskutoimitukset, erityisesti kertolasku sekä liitto– ja käänteisalkion muodostaminen, näyttävät napaesityksen avulla.
Kertolasku[10]. Olkoot napaesitystä käyttäen

$$z_1 = r_1(\cos\phi + i\sin\phi), \quad z_2 = r_2(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Tällöin tietysti

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| = r_1 r_2.$$

Toisaalta, kertomalla napaesitykset keskenään saamme

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r_1 r_2(\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta + i(\cos\phi\sin\theta + \cos\theta\sin\phi)). \end{aligned}$$

Sovelletaan nyt sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoja

$$\cos\phi\sin\theta + \cos\theta\sin\phi = \sin(\phi+\theta), \quad \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta = \cos(\phi+\theta),$$

jolloin voimme sieventää yllä olevan laskun muotoon

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi+\theta) + i\sin(\phi+\theta)).$$

Siten tulon $z_1 z_2$ argumentti on tekijöiden z_1 ja z_2 argumenttien summa, $\phi+\theta$. On syytä huomata, että tämä luku saattaa hyvinkin olla kuulumatta alkuperäiselle argumentin määrittelyvälille, joten se on määritelty vain 2π:n kokonaislukumonikertaa vaille.
Liittoalkio. Olkoot napaesityksessä $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$. Tällöin

$$\overline{z} = r(\cos\phi - i\sin\phi) = r(\cos(-\phi) + i\sin(-\phi)),$$

sillä kosini on *parillinen* ja sini on *pariton* funktion, eli

$$\cos(-\phi) = \cos(\phi), \quad \sin(-\phi) = -\sin(\phi).$$

Näin ollen liittoluvun moduli on sama kuin z:n, ja argumentin merkki muuttuu.

Käänteisalkio. Tarkastellaan lopuksi, miltä käänteisalkion muodostaminen näyttää napakoordinaateissa. Olkoon siis $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \neq 0$. Tällöin

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}z} = \frac{r(\cos(-\phi) + i\sin(-\phi))}{r^2} = \frac{(\cos(-\phi) + i\sin(-\phi))}{r}.$$

Siten käänteislkio saadaan jakamalla luvulla $|z|^2$ ja muuttamalla argumentti vastaluvukseen. Geomerisesti tämä vastaa peilausta yksikköympyrän $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ suhteen yhdistettynä peilaukseen x–akselin suhteen.

[10]Yhteenlaskun ymmärtämisessä napaesityksestä ei ole välitöntä etua, joten sivuutamme sen.

4.3. Moivrén kaava. Moivrén kaava yleistää edellä esitetyn havainnon tulon argumentista kompleksiluvun z korkeammille potensseille. Olkoon nyt

$$z = x + iy = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Tällöin saamme

$$z^2 = z \cdot z = r^2(\cos 2\phi + i\sin 2\phi),$$

ja

$$z^3 = z \cdot z^2 = r^3(\cos(\phi + 2\phi) + i\sin(\phi + 2\phi)) = r^3(\cos 3\phi + i\sin 3\phi).$$

Nyt on helppo arvata, että jokaisella luonnollisella luvulla n pätee

$$z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi). \tag{4.3.1}$$

Tämä on todellakin totta, ja tunnetaan nimellä *Moivrén kaava*. Emme ole kuitenkaan vielä **todistaneet**, että se pätee. Tämän teemme käyttäen matemaattista periaatetta nimeltä *täydellinen induktio*. Oletetaan, että haluamme osoittaan, että väite, olkoon se vaikka nimeltään P_n, pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla n. Oletetaan myös että osaamme todistaa että P_1 pätee. Täydellinen induktioperiaate sanoo, että mikäli siitä oletuksesta että P_{n-1} pätee, osaamme todistaa, että P_n pätee, seuraa, että väite P_n pätee kaikilla n. Sovellamme tätä Moivrén kaavan todistukseen:

Moivrén kaavan väite arvolla $n = 1$ on itse asiassa triviaali, sillä se redusoituu väitteeseen

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi),$$

joka on suoraan luvun z napaesitys. Oletetaan nyt että

$$z^{n-1} = r^{n-1}(\cos(n-1)\phi + i\sin(n-1)\phi).$$

Tällöin käyttäen periaatetta *tulon argumentti on argumenttien summa* saamme

$$\begin{aligned} z^n &= zz^{n-1} = rr^{n-1}(\cos(\phi + (n-1)\phi) + i\sin(\phi + (n-1)\phi)) \\ &= r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi), \end{aligned}$$

eli täsmälleen Moivrén kaavan väite arvolla n. Katsotaan seuraavaksi muutaman esimerkin avulla kuinka tätä kaavaa voidaan hyödyntää.

1. Lasketaan i^7. Nyt $i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$, joten $|i| = 1$ ja sen argumentti on $\pi/2$, ja Moivrén kaavan nojalla

$$i^7 = \cos(7\pi/2) + i\sin(7\pi/2) = \cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2) = 0 - i = -i.$$

2. Lasketaan $(1+i)^8$. Nyt $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ ja argumentti ϕ määräytyy ehdoista
$$\cos\phi = \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
eli $\phi = \pi/4$. Siten Moivrén kaavan nojalla
$$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8\,(\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4)) = 2^4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16.$$

3. Lasketaan vielä luku z^4, kun
$$z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Nyt $|z| = \sqrt{1/4+3/4} = 1$ ja argumentti ϕ saadaan yhtälöistä
$$\cos\phi = \frac{1}{2}, \quad \sin\phi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
eli $\phi = -\pi/3$. Moivrén kaavojen nojalla
$$z^4 = \cos(-\frac{4\pi}{3}) + i\sin(-\frac{4\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.4. *Trigonometrisiä kaavoja.* Moivrén kaavan avulla on mahdollista johtaa helposti useita trigonometrisä yhtälöitä. Katsotaan esimerkiä. Olkoon $z = \cos\phi + i\sin\phi$. Tällöin suoraan laskemalla
$$z^3 = (\cos\phi + i\sin\phi)^3 = \cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi + i(3\cos^2\phi\sin\phi - \sin^3\phi).$$
Toisaalta Moivrén kaavan perusteella
$$z^3 = \cos(3\phi) + i\sin(3\phi).$$
Ylläolevista saadaan siis vertaamalla reaali– ja imaginääriosia kolminkertaisenkulman kaavat
$$\sin(3\phi) = 3\cos^2\phi\sin\phi - \sin^3\phi, \quad \cos(3\phi) = \cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi.$$
Nämä kaavat voi toki johtaa suoraankin sinin ja kosinin yhtenlaskukaavoista, mutta mielestäni Moivrén kaavan avulla tehty todistus on huomattavasti elegantimpi. Ei myöskään vaadi suurta lisätyötä johtaa lausekkeet $\sin(n\phi)$:lle ja $\cos(n\phi)$:lle[11].

[11] Vihje: käytä binomikaavaa
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

5. Algebrallisista yhtälöistä. Tässä osioissa ratkaisemme polynomiyhtälöitä kompleksitasossa. Aloitame kaikille tutulla toisen asteen yhtälöllä.

5.1. Toisen asteen yhtälö. Tarkastellaan yhtälöä

$$az^2 + bz + c = 0,$$

missä kertoimet a, b ja c ovat aluksi reaalilukuja. Palaamme yleisiin kompleksikertoimiin hetken päästä. Oletetaan vielä että $a > 0$. Täydentämällä neliöksi saamme yhtäpitävän yhtälön

$$\left(\sqrt{a}z + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c = 0,$$

eli merkitsemällä $w = \sqrt{a}z + b/(2\sqrt{a})$ saamme yhtälön

$$w^2 = \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Tämän yhtälön ratkaisujen luonne riippu siis *diskriminantin* $D = b^2 - 4ac$ merkistä. Jos $D \geq 0$ saamme ratkaisut

$$w = \pm\frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{a}},$$

eli palauttamalla mieliin että $w = \sqrt{a}z + b/(2\sqrt{a})$ saamme lopulta

$$z = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Jos taas $D < 0$ niin kirjottamalla $D = -|D|$ saamme yhtälön

$$w^2 = -\frac{|D|}{4a},$$

Tällä on ratkaisuna

$$w = \pm i\frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{a}},$$

ja saamme z:lle kaavan

$$z = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{|D|}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

mikäli $D = b^2 - 4ac < 0$.

5.2. Binomiyhtälö. Jos haluamme ratkaista esimerkiksi toisen asteen yhtälön yleisillä kompleksikertoimilla, joudumme ratkaisemaan yhtälön

$$w^2 = z_0,$$

missä z_0 on kompleksiluku. Tarkastellaan aluksi yhtälöä

$$z^n = 1, \tag{5.2.1}$$

missä $n \in \mathbb{N}$. Kirjoitetaan z napaesitystä käyttäen $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, jolloin Moivrén kaavan avulla saamme $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$. Yhtälö muuntuu nyt muotoon

$$r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) = 1,$$

eli saamme

$$r^n = 1,$$

ja ϕ:lle yhälöparin

$$\cos(n\phi) = 1, \quad \sin(n\phi) = 0.$$

Tällä on ratkaisuina (muista että $r \geq 0$)

$$r = 1, \quad n\phi = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Valitsemalla vain ne argumentin ϕ arvot, jotka kuuluvat välille $[0, 2\pi)$ saamme ratkaisuksi

$$r = 1,\ \phi = 2k\pi/n,\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{5.2.2}$$

Pisteet

$$z_k = \cos(2\pi ik/n) + i\sin(2\pi ik/n),\ k \in \mathbb{Z},$$

määräävät säännöllisen n-kulmion, jolla on yksi kärkipiste pisteessä $z_0 = 1$, ja muut $n-1$–kärkipistettä origokeskisen yksisäteisen ympyrän kehällä.

Katsotaan seuraavia esimerkkejä:

1. Ratkaistaan yhtälö

$$z^2 = 1.$$

Tällä on triviaalisti ratkaisut $z = \pm 1$, ja tämä on luonnollisesti yhtäpitävää ylläolevan päättelyn kanssa, sillä $-1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$.

2. Määrätään seuraavaksi kaikki yhtälön

$$z^4 = 1$$

ratkaisut. Edellä olevan nojalla saamme ratkaisuiksi

$$z_0 = 1,\ z_1 = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2),$$

$$z_2 = \cos(\pi) + i\sin(\pi),\ z_3 = \cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2),$$

eli

$$z_0 = 1,\ z_1 = i,\ z_2 = -1,\ z_3 = -i.$$

Tarkastellaan kurssin lopuksi hieman yleisempää yhtälöä

$$z^n = w \in \mathbb{C}.$$

Kirjoitetaan sekä z että w käyttäen napaesitystä:

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi),\ w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Moivrén kaavan nojalla saamme siis yhtälön

$$r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

eli yhtälöt

$$r^n = \rho, \quad \phi = \theta + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tästä saadaan ratkaisuiksi

$$r = \rho^{1/n},\ \phi = \theta/n + 2\pi k/n,\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Kaikki ratkaisut ovat siis

$$z_k = \rho^{1/n}(\cos(\theta/n + 2\pi k/n) + i\sin(\theta/n + 2\pi k/n)),\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Tätä tulosta käyttäen on helppo yleistää (käyttäen tapausta $n = 2$) toisen asteen yhtäön ratkaisukaava mielivaltaisille kompleksikertoimille. Tämä jätetään kuitenkin harjoitustehtäväksi.

6. Eksponentti- ja trigonometriset funktiot kompleksitasossa Tässä osiossa laajennamme eksponenttifunktion e^x ja trigonometriset funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ kompleksitasoon. Osoittautuu, että nämä laajennukset liittyvät syvällisesti toisiinsa.

6.1. Trigonometriset funktiot kompleksitasossa Tarvitsemme seuraavia sarjakehitelmiä, jotka johdetaan myöhemmin Analyysin kurssilla. Nyt pyydän että hyväksytte nämä tulokset ilman todistuksia - *trust me, I know what I'm doing.* Voidaan osoittaa, että kaikilla realiluvuilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{6.1.1}$$

ja

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{6.1.2}$$

Nämä ovat esimerkkejä ns. *potenssisarjoista*, joiden matemaattinen teoria on klassinen ja tärkeä ala. Merkintä $m!$ tarkoittaa luonnollisen luvun m *kertomaa*,

$$m! = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Määrittelemme lisäksi $0! = 1$. Nyt pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla

$$m! = m(m-1)!.$$

Sarjoilla (6.1.1) ja (6.1.2) on lukuisia hyödyllsiä ominaisuuksia. Niitä voi esimerkiksi derivoida termeittäin. Lasketaan:

$$\begin{aligned} \frac{d(\sin x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) && (6.1.3) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) && (6.1.4) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x. && (6.1.5) \end{aligned}$$

Samalla tavalla voi osoittaa että $d(\cos x)/dx = -\sin x$. Jos $z \in \mathbb{C}$ määrittelemme nyt[12]

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{6.1.6}$$

[12] Ei ole vaikea nähdä, että nämä sarjat suppenevat kaikilla z:n kompleksiarvoilla. Tämä johtuu siitä että

$$|\sum_{n=k}^{l} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}| \leq \sum_{n=k}^{l} (-1)^n \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ja tässä oikea puoli suppenee kohti nolla, kun k, $l \to \infty$, sillä sarja suppeni reaaliluvuilla. Samoin kosinin sarjalle. Tämä selviää lopullisesti Analyysin kurssilla.

ja

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \tag{6.1.7}$$

6.2. Eksponenttifunktio kompleksitasossa Aloitamme jälleen sarjakehitelmällä: kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Tämäkin osoitetaan Analyysin kursseilla. Tällä sarjalla on samat hyödylliset ominaisuude kuin trigonometristen funktoiden kehitelmillä. Derivoimalla nähdään esimerkiksi

$$\begin{aligned} \frac{d(e^x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) && (6.2.1)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} && (6.2.2)\\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x. && (6.2.3) \end{aligned}$$

Tässä teimme summausindeksin vaihdon $n-1 \to m$. Eksponenttifunktio on siis itsensä derivaatta[13] . Olkoon nyt $z \in \mathbb{C}$. Määrittelemme sarjakehitelmää käyttäen

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Sarja suppenee kaikilla $z \in \mathbb{C}$ samasta syystä kuin trigonometristen funktoiden potenssisarjat. Laskusäännäöt ovat samat kuin reaalisilla eksponenteilla: Lasketaan esimerkiksi

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= \sum_{n=0}^{\infty} (z+w)^n/n! = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}/n! && (6.2.4)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k+l=n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^l}{l!} && (6.2.5)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!} = e^z\, e^w. && (6.2.6) \end{aligned}$$

[13]Tämä ominaisuus yhdessä sen kanssa että eksponenttifunktion arvo origossa on yksi määrää funktion itseasissa täysin.

Tässä summausjärjestystä saa vaihtaa sillä kaikki sarjat ovat *itseisesti suppenevia*. Tämä selitetään Analyysin kurssilla.

6.3. Eksponenttiifunktion ja trigonometristen funktioiden välinen yhteys. Olkoot nyt $z = iy$ puhtaasti imaginaarinen. Lasketaan e^{iy}. Sijoittamalla sarjakehitelmään saadaan

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n\,\text{parillinen}} \frac{(iy)^n}{n!} + \sum_{n\,\text{pariton}} \frac{(iy)^n}{n!} && (6.3.1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!}. && (6.3.2) \end{aligned}$$

Nyt

$$(iy)^{2k} = i^{2k}\, y^{2k} = (-1)^k y^{2k},$$

ja

$$(iy)^{2k+1} = i^{2k+1}\, y^{2k+1} \;= i(-1)^k y^{2k+1}.$$

Käyttämällä sinin ja kosinin sarjakehitelmiä saamme siis

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos y + i \sin y.$$

Tällä kaavalla on mielenkiintoisia seurauksia. Ensinnäkin yleiselle $z = x + iy$ saamme

$$e^z = e^x\, e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Olisimme voineet ottaa tämän myös suoraan e^z:n määritelmäksi. Edelleen, jos $n \in \mathbb{Z}$, niin

$$\cos(ny) + i \sin(ny) = e^{iny} = \left(e^{iy}\right)^n = (\cos y + i \sin y)^n.$$

Olemme siis johtaneet Moivren kaavan suoraan eksponenttifunktion perusominaisuuksista. Lopuksi lasketaan pari esimerkkiä:

$$e^{i\pi/2} \;= \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i,$$

ja

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$