MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Lukualueet
Harjoitus 4
1.10.2010 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia: Aapo Tevanlinna

1. Sievennä luvut

$$\frac{5}{4-2i} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{(1+i)^2}$$

muotoon $x + iy$.

Ratkaisu: Käytetään hyväksi havaintoa $1/z = \overline{z}/|z|^2$. Tällöin on

$$\frac{5}{4-2i} = \frac{5(4+2i)}{4^2+(-2)^2} = \frac{20+10i}{20} = 2 + \frac{1}{2}i$$

ja

$$\frac{1}{(1+i)^2} = \frac{\overline{(1+i)^2}}{|(1+i)^2|^2} = \frac{\overline{2i}}{|2i|^2} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2}i.$$

2. Lausu $\cos 4\phi$ ja $\sin 4\phi$ lukujen $\cos\phi$ ja $\sin\phi$ avulla.

Ratkaisu: Moivrèn kaavalla

$$\begin{aligned}\cos 4\phi + i \sin 4\phi &= (\cos\phi + i\sin\phi)^4 \\ &= \cos^4\phi + i4\cos^3\phi\sin\phi - 6\cos^2\phi\sin^2\phi - i4\cos\phi\sin^3\phi + \sin^4\phi.\end{aligned}$$

Edellisen yhtälön mukaan $\cos 4\phi$ on reaaliosa oikealla puolella olevasta lausekkeesta ja $\sin 4\phi$ vastaava imaginääriosa. Siis

$$\begin{cases}\cos 4\phi = \cos^4\phi - 6\cos^2\phi\sin^2\phi + \sin^4\phi \\ \sin 4\phi = 4\cos^3\phi\sin\phi - 4\cos\phi\sin^3\phi.\end{cases}$$

3. Ratkaise yhtälö

$$z = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C}$$

kirjoittamalla suoraan yhtälöt z:n reaali- ja imaginääriosille.

Ratkaisu: Kun $z = x + iy \neq 0$, niin monisteen sivun 12 alaosan nojalla saamme yhtälöt

$$Re(\frac{1}{z}) = \frac{x}{x^2 + y^2} = x = Re(z)$$

ja

$$Im(\frac{1}{z}) = \frac{-y}{x^2 + y^2} = y = Im(y).$$

Näistä jälkimmäinen yhtälö toteutuu vain, jos $y = 0$. Tämän perusteella ensimmäinen yhtälö toteutuu vain, kun $x^2 = 1$ eli kun $x = 1$ tai $x = -1$.

Samaan havaintoon pääsee myös toisella tavalla:

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{z} \iff x + iy = \frac{1}{x + iy} &\iff (x + iy)^2 = 1 \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

missä yhtälöpari toteutuu vain samoilla ehdoilla $y = 0$ ja $x = \pm 1$.

4. Olkoon $z = 1 - i\sqrt{3}$. Laske z^{11}.

Ratkaisu: Käytetään hyväksi napakoordinaattiesitystä. Ratkaistaan sitä varten luvun z moduli ja argumentti:

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2 \\ arg\ z = \phi = \frac{5\pi}{3} \quad (\cos\phi = \frac{1}{2}, \quad \sin\phi = -\frac{\sqrt{3}}{2}). \end{cases}$$

Napakoordinaattiesityksen ja Moivrèn kaavan avulla saamme

$$\begin{aligned} z^{11} &= |z|^{11}(\cos\phi + i\sin\phi)^{11} = 2^{11}(\cos 11\frac{5\pi}{3} + i\sin 11\frac{5\pi}{3}) \\ &= 2^{11}(\cos\frac{55\pi}{3} + i\sin\frac{55\pi}{3}) = 2^{11}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}). \end{aligned}$$

Tätä voi edelleen sieventää, jos haluaa. Koska

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

niin

$$z^{11} = 2^{11}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2^{10} + 2^{10}\sqrt{3}i.$$

5. Määritä kaikki ne kompleksiluvut $z \in \mathbb{C}$, joilla $1/z = \overline{z}$.

Ratkaisu: Koska tehtävän yhtälö voi toteutua vain kun $z \neq 0$, niin voimme suoraan päätellä, että $1/z = \overline{z}$ jos ja vain jos $z\overline{z} = 1$. Tämä taas puolestaan on yhtäpitävää sen kanssa, että $|z|^2 = 1$ eli luvun z täytyy sijaita yksikköympyrällä.

Vertaa tulosta tehtävään 3.

6. Ratkaise trigonometrinen yhtälö

$$\frac{1}{2}\sin 2\phi + \sin 2\phi \cos 2\phi = \frac{1}{2}(\cos\phi + \sin\phi)^2.$$

Ratkaisu: Moivrèn kaavalla saamme ensiksi, että $\sin 2\phi = 2\cos\phi\sin\phi$ [1] ja vastaavasti, että $\sin 4\phi = 2\cos 2\phi \sin 2\phi$. Tällöin lisäksi muistamalla, että $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$, saamme

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sin 2\phi + \underbrace{\sin 2\phi\cos 2\phi}_{=\frac{1}{2}\sin 4\phi} = \frac{1}{2}(\cos\phi + \sin\phi)^2 \\
\iff\ & \frac{1}{2}\sin 2\phi + \frac{1}{2}\sin 4\phi = \frac{1}{2}(\underbrace{\cos^2\phi + \sin^2\phi}_{=1} + \underbrace{2\cos\phi\sin\phi}_{=\sin 2\phi}) \\
\iff\ & \frac{1}{2}\sin 4\phi = \frac{1}{2} \\
\iff\ & \sin 4\phi = 1 \\
\iff\ & \phi = \frac{\frac{\pi}{2} + n2\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

[1]Kuten tehtävässä 2.