Joukko-opin alkeet
Harjoitus 9
18.11.2010
Ratkaisuehdotuksia (Jr)

1. Olkoon $E : \omega \to \mathbb{Z}$, $E(n) = [\langle n, 0\rangle]$. Osoita, että kaikille $m, n \in \omega$ pätee

a) $E(m + n) = E(m) +_{\mathbb{Z}} E(n)$,

b) $E(mn) = E(m) \cdot_{\mathbb{Z}} E(n)$,

c) $m \in n$ joss $E(m) <_{\mathbb{Z}} E(n)$.

Ratkaisu: Olkoot $m, n \in \omega$. Tällöin

a)

$$E(m) +_{\mathbb{Z}} E(n) = [\langle m, 0\rangle] +_{\mathbb{Z}} [\langle n, 0\rangle] = [\langle m + n, 0\rangle] = E(m + n),$$

b)

$$E(m) \cdot_{\mathbb{Z}} E(n) = [\langle m, 0\rangle] \cdot_{\mathbb{Z}} [\langle n, 0\rangle] = [\langle mn, 0\rangle] = E(mn),$$

c)

$$E(m) <_{\mathbb{Z}} E(n) \text{ joss } [\langle m, 0\rangle] <_{\mathbb{Z}} [\langle n, 0\rangle] \text{ joss } m < n \text{ joss } m \in n.$$

2. Määrittele kokonaisluvuille järjestysrelaatio $\leq$. Todista, että kaikille kokonaisluvuille a ja b pätee: jos $0 \leq a$ ja $0 \leq b$, niin $0 \leq ab$.

Ratkaisu: Määritellään kaikille $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$a \leq b \text{ joss } a < b \text{ tai } a = b.$$

Olkoot sitten $a, b \in \mathbb{Z}$ sellaisia, että $0 \leq a$ ja $0 \leq b$. Tarkastellaan kolmea tapausta:

$0 = a$: Tällöin $0 = 0 \cdot b = ab$, jolloin $0 \leq ab$.

$0 = b$: Vastaavasti kuin yllä, $0 = 0 = a \cdot 0 = ab$, jolloin $0 \leq ab$.

$0 < a$ ja $0 < b$: Koska positiivisella luvulla kertominen säilyttää järjestyksen, saadaan $0 = 0 \cdot b < ab$, jolloin $0 \leq ab$.

3. Todista jakoyhtälö: Jos a ja b ovat kokonaislukuja ja $0 < b$, niin on olemassa sellaiset yksikäsitteiset kokonaisluvut c ja d, joille

$$a = cb + d \text{ ja } 0 \leq d < b.$$

Vihje: Olkoon $\mathbb{Z}^+ = \{z \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq z\}$. Lauseen 5ZL nojalla ω ja $\mathbb{Z}^+$ voidaan samaistaa. Osoita, että joukossa

$$A = \{d \in \mathbb{Z}^+ \mid d = a - cb \text{ jollakin } c \in \mathbb{Z}\}$$

on pienin luku d', jolle pätee $0 \leq d' < b$.

Ratkaisu: Osoitetaan aluksi, että kaikilla $a \in \mathbb{Z}$ pätee:

$$0 \leq a \text{ joss on olemassa sellainen } m \in \omega, \text{ että } a = E(m).$$

Olkoon $a \in \mathbb{Z}$. Jos $a = E(m)$ jollakin $m \in \omega$, niin tapauksessa $0 = m$ pätee $0 = [\langle 0, 0\rangle] = [\langle m, 0\rangle] = a$ ja tapauksessa $0 \in m$ pätee $0 = [\langle 0, 0\rangle] < [\langle m, 0\rangle] = a$. Jos $0 = a$, niin $E(0) = a$. Jos $0 = [\langle 0, 0\rangle] < [\langle m, n\rangle] = a$, niin $n \in m$, jolloin harjoituksen 7 tehtävän 6 nojalla $m = n + p^+$ jollakin $p \in \omega$, jolloin $a = [\langle m, n\rangle] = [\langle p^+, 0\rangle] = E(p^+)$.

Yllä osoitetun nojalla $E\omega = \mathbb{Z}^+$ ja näin ollen ω ja $\mathbb{Z}^+$ voidaan samaistaa lauseen 5ZL nojalla.

Todistetaan sitten lukujen c ja d olemassaolo. Tutkitaan joukkoa

$$A = \{d \in \mathbb{Z}^+ \mid d = a - cb \text{ jollakin } c \in \mathbb{Z}\}.$$

Todetaan aluksi, että $A \neq \emptyset$, koska tapauksessa $a \geq 0$ voidaan valita $c = 0$, jolloin $a \in A$, ja tapauksessa $a < 0$ voidaan valita $c = a$, jolloin $a - ab = a(1 - b) \geq 0$ ja näin ollen $a - ab \in A$. Koska A on epätyhjä ei-negatiivisten kokonaislukujen joukon osajoukko, A:ssa on pienin alkio $d' \in \mathbb{Z}^+$ ω:n hyvinjärjestyksen sekä ω:n ja $\mathbb{Z}^+$:n samaistuksen nojalla. Siis $d' = a - c'b$ jollakin $c' \in \mathbb{Z}$. Osoitetaan, että $d' < b$. Tehdään vastaoletus: $b \leq d'$. Tällöin

$$d = a - (c' + 1)b = d' - b < d',$$

ja koska $d' - b \in \mathbb{Z}^+$, niin $d' - b \in A$, mikä on mahdotonta d':n minimaalisuuden perusteella. Vastaoletus on siis väärä ja on oltava $d' < b$. Näin ollen c' ja d' ovat ehdot täyttäviä kokonaislukuja.

Todistetaan lopuksi lukujen c ja d yksikäsitteisyys. Olkoot $a = cb+d = c'b+d'$ ja $0 \leq d, d' < b$. Tällöin pätee $(c - c')b = d' - d$. Riittää osoittaa, että $c = c'$. Tehdään vastaoletus: $c \neq c'$. Tällöin joko $c < c'$ tai $c' < c$. Tapauksessa $c < c'$ pätee $c - c' \leq -1$ ja näin ollen $d' - d \leq -b$. Koska $0 \leq d'$ ja $-b < -d$, pätee toisaalta $-b = 0 - b < d' - d$, mikä on ristiriita. Tapauksessa $c' < c$ pätee $1 \leq c - c'$ ja näin ollen $b \leq d' - d$. Koska $d' < b$ ja $-d \leq 0$, pätee toisaalta $d' - d < b + 0 = b$, mikä on jälleen ristiriita. Vastaoletus on siis väärä ja on oltava $c = c'$, jolloin myös $d = d'$.

4. Todista, että jos a ja b ovat kokonaislukuja ja $b \neq 0$, niin on olemassa sellaiset yksikäsitteiset kokonaisluvut c ja d, joille

$$a = cb + d \text{ ja } 0 \leq d < |b|,$$

missä $|b| = b$, jos $0 \leq b$, ja $|b| = -b$ muulloin.

Ratkaisu: Koska $b \neq 0$, on joko $b < 0$ tai $0 < b$. Tapaus $0 < b$ on todistettu tehtävässä 4. Oletetaan siis, että $b < 0$. Tällöin $0 < -b$ ja tehtävän 4 nojalla on olemassa yksikäsitteiset kokonaisluvut c ja d, joille pätee

$$a = c(-b) + d \text{ ja } 0 \leq d < -b.$$

Koska $-b = |b|$, yhtälö $a = c(-b) + d$ on yhtäpitävä yhtälön $a = (-c)b + d$ kanssa ja luvun c vastaluku $-c$ on yksikäsitteinen, pätee tehtävän väite myös tapauksessa $b < 0$.

5. Osoita, että $r \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} = 0_{\mathbb{Q}}$ kaikille rationaaliluvuille r.

Ratkaisu: Tehtävän voi ratkaista suoraan määritelmien perusteella: Kun $r = [\langle a, b\rangle]$, niin

$$\begin{aligned} r \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} &= [\langle a, b\rangle] \cdot_{\mathbb{Q}} [\langle 0, 1\rangle] \\ &= [\langle a \cdot 0, b \cdot 1\rangle] \\ &= [\langle 0, b\rangle] \\ &= 0_{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

Toinen tapa on käyttää lausetta 5QC, yhteenlaskun liitäntälakia sekä osittelulakia:

$$\begin{aligned} r \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} &= r \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} \\ &= r \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} (r \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} -(r \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}})) \\ &= (r \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} r \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}) +_{\mathbb{Q}} -(r \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}) \\ &= r \cdot_{\mathbb{Q}} (0_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}) +_{\mathbb{Q}} -(r \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}) \\ &= r \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} -(r \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}})) \\ &= 0_{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

Tämä todistus on täsmälleen sama kuin kokonaislukujen vastaavan tuloksen todistus, ks. harjoituksen 8 tehtävä 4.

6. Todista suoraan käyttämättä lausetta 5QF, että jos $r \cdot_{\mathbb{Q}} s = 0_{\mathbb{Q}}$, niin $r = 0_{\mathbb{Q}}$ tai $s = 0_{\mathbb{Q}}$.

Ratkaisu: Olkoot $r = [\langle a, b\rangle]$ ja $s = [\langle c, d\rangle]$. Oletetaan, että $r \cdot_{\mathbb{Q}} s = 0_{\mathbb{Q}}$. Tällöin

$$[\langle ac, bd\rangle] = [\langle a, b\rangle] \cdot_{\mathbb{Q}} [\langle c, d\rangle] = [\langle 0, 1\rangle],$$

joten $(ac) \cdot 1 = 0 \cdot (bd)$ eli $ac = 0$. Koska tulon nollasääntö pätee kokonaisluvuille, on $a = 0$ tai $c = 0$. Jos $a = 0$, on

$$r = [\langle a, b\rangle] = [\langle 0, b\rangle] = 0_{\mathbb{Q}},$$

ja jos $b = 0$, on

$$s = [\langle c, d\rangle] = [\langle 0, d\rangle] = 0_{\mathbb{Q}}.$$