

Joukko-opin alkeet
Harjoitus 9
18.11.2010

1. Olkoon $E : \omega \rightarrow \mathbb{Z}$, $E(n) = [\langle n, 0 \rangle]$. Osoita, että kaikille $m, n \in \omega$ pätee

a) $E(m + n) = E(m) +_{\mathbb{Z}} E(n)$,

b) $E(mn) = E(m) \cdot_{\mathbb{Z}} E(n)$,

c) $m \in n$ joss $E(m) <_{\mathbb{Z}} E(n)$.

2. Määrittele kokonaisluvuille järjestysrelaatio \leq . Todista, että kaikille kokonaisluvuille a ja b pätee: jos $0 \leq a$ ja $0 \leq b$, niin $0 \leq ab$.

3. Todista jakoyhtälö: Jos a ja b ovat kokonaislukuja ja $0 < b$, niin on olemassa sellaiset yksikäsitteiset kokonaisluvut c ja d , joille

$$a = cb + d \text{ ja } 0 \leq d < b.$$

Vihje: Olkoon $\mathbb{Z}^+ = \{z \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq z\}$. Lauseen 5ZL nojalla ω ja \mathbb{Z}^+ voidaan samaistaa. Osoita, että joukossa

$$A = \{d \in \mathbb{Z}^+ \mid d = a - cb \text{ jollakin } c \in \mathbb{Z}\}$$

on pienin luku d' , jolle pätee $0 \leq d' < b$.

4. Todista, että jos a ja b ovat kokonaislukuja ja $b \neq 0$, niin on olemassa sellaiset yksikäsitteiset kokonaisluvut c ja d , joille

$$a = cb + d \text{ ja } 0 \leq d < |b|,$$

missä $|b| = b$, jos $0 \leq b$, ja $|b| = -b$ muulloin.

5. Osoita, että $r \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} = 0_{\mathbb{Q}}$ kaikille rationaaliluvuille r .

6. Todista suoraan käyttämättä lausetta 5QF, että jos $r \cdot_{\mathbb{Q}} s = 0_{\mathbb{Q}}$, niin $r = 0_{\mathbb{Q}}$ tai $s = 0_{\mathbb{Q}}$.