Joukko-opin alkeet
Harjoitus 8
11.11.2010
Ratkaisuehdotuksia (Jr)

1. Osoita, että kaikille $a, b, c \in \mathbb{Z}$ pätee

a) $a +_{\mathbb{Z}} b = b +_{\mathbb{Z}} a$,

b) $(a +_{\mathbb{Z}} b) +_{\mathbb{Z}} c = a +_{\mathbb{Z}} (b +_{\mathbb{Z}} c)$.

Ratkaisu: Olkoot $a = [\langle m, n\rangle]$, $b = [\langle p, q\rangle]$ ja $c = [\langle r, s\rangle]$.

a) Tällöin

$$\begin{aligned}
a +_{\mathbb{Z}} b &= [\langle m, n\rangle] +_{\mathbb{Z}} [\langle p, q\rangle] \\
&= [\langle m+p, n+q\rangle] && +_{\mathbb{Z}}\text{:n määritelmä} \\
&= [\langle p+m, q+n\rangle] && \omega\text{:n } +\text{:n vaihdannaisuus} \\
&= [\langle p, q\rangle] +_{\mathbb{Z}} [\langle m, n\rangle] && +_{\mathbb{Z}}\text{:n määritelmä} \\
&= b +_{\mathbb{Z}} a.
\end{aligned}$$

b) Tällöin

$$\begin{aligned}
(a +_{\mathbb{Z}} b) +_{\mathbb{Z}} c &= ([\langle m, n\rangle] +_{\mathbb{Z}} [\langle p, q\rangle) +_{\mathbb{Z}} [\langle r, s\rangle] \\
&= [\langle m+p, n+q\rangle] +_{\mathbb{Z}} [\langle r, s\rangle] && +_{\mathbb{Z}}\text{:n määritelmä} \\
&= [\langle (m+p)+r, (n+q)+s\rangle] && +_{\mathbb{Z}}\text{:n määritelmä} \\
&= [\langle m+(p+r), n+(q+s)\rangle] && \omega\text{:n } +\text{:n liitännäisyys} \\
&= [\langle m, n\rangle] +_{\mathbb{Z}} [\langle p+r, q+s\rangle] && +_{\mathbb{Z}}\text{:n määritelmä} \\
&= [\langle m, n\rangle] +_{\mathbb{Z}} ([\langle p, q\rangle] +_{\mathbb{Z}} [\langle r, s\rangle]) && +_{\mathbb{Z}}\text{:n määritelmä} \\
&= a +_{\mathbb{Z}} (b +_{\mathbb{Z}} c).
\end{aligned}$$

2. Osoita, että kaikille $a, b, c \in \mathbb{Z}$ pätee

a) $a \cdot_{\mathbb{Z}} b = b \cdot_{\mathbb{Z}} a$,

b) $(a \cdot_{\mathbb{Z}} b) \cdot_{\mathbb{Z}} c = a \cdot_{\mathbb{Z}} (b \cdot_{\mathbb{Z}} c)$,

c) $a \cdot_{\mathbb{Z}} (b +_{\mathbb{Z}} c) = (a \cdot_{\mathbb{Z}} b) +_{\mathbb{Z}} (a \cdot_{\mathbb{Z}} c)$.

Ratkaisu: Olkoot $a = [\langle m, n\rangle]$, $b = [\langle p, q\rangle]$ ja $c = [\langle r, s\rangle]$.

a) Luonnollisten lukujen summan ja tulon vaihdannaisuuden avulla saadaan

$$\begin{aligned} a \cdot_{\mathbb{Z}} b &= [\langle m, n\rangle] \cdot_{\mathbb{Z}} [\langle p, q\rangle] \\ &= [\langle mp + nq, mq + np\rangle] \\ &= [\langle pm + qn, pn + qm\rangle] \\ &= [\langle p, q\rangle] \cdot_{\mathbb{Z}} [\langle m, n\rangle] \\ &= b \cdot_{\mathbb{Z}} a. \end{aligned}$$

b) Luonnollisten lukujen osittelulain ja tulon liitännäisyyden avulla saadaan

$$\begin{aligned} (a \cdot_{\mathbb{Z}} b) \cdot_{\mathbb{Z}} c &= ([\langle m, n\rangle] \cdot_{\mathbb{Z}} [\langle p, q\rangle]) \cdot_{\mathbb{Z}} [\langle r, s\rangle] \\ &= [\langle mp + nq, mq + np\rangle] \cdot_{\mathbb{Z}} [\langle r, s\rangle] \\ &= [\langle (mp + nq)r + (mq + np)s, (mp + nq)s + (mq + np)r\rangle] \\ &= [\langle m(pr + qs) + n(ps + qr), m(ps + qr) + n(pr + qs)\rangle] \\ &= [\langle m, n\rangle] \cdot_{\mathbb{Z}} [\langle pr + qs, ps + qr\rangle] \\ &= [\langle m, n\rangle] \cdot_{\mathbb{Z}} ([\langle p, q\rangle] \cdot_{\mathbb{Z}} [\langle r, s\rangle]) \\ &= a \cdot_{\mathbb{Z}} (b \cdot_{\mathbb{Z}} c). \end{aligned}$$

c) Luonnollisten lukujen osittelulain ja yhteenlaskun liitännäisyyden ja vaihdannaisuuden avulla saadaan

$$\begin{aligned} a \cdot_{\mathbb{Z}} (b +_{\mathbb{Z}} c) &= [\langle m, n\rangle] \cdot_{\mathbb{Z}} ([\langle p, q\rangle] +_{\mathbb{Z}} [\langle r, s\rangle]) \\ &= [\langle m, n\rangle] \cdot_{\mathbb{Z}} [\langle p + r, q + s\rangle] \\ &= [\langle m(p + r) + n(q + s), m(q + s) + n(p + r)\rangle] \\ &= [\langle (mp + mr) + (nq + ns), (mq + ms) + (np + nr)\rangle] \\ &= [\langle (mp + nq) + (mr + ns), (mq + np) + (ms + nr)\rangle] \\ &= [\langle mp + nq, mq + np\rangle] +_{\mathbb{Z}} [\langle mr + ns, ms + nr\rangle] \\ &= [\langle m, n\rangle] \cdot_{\mathbb{Z}} [\langle p, q\rangle] +_{\mathbb{Z}} [\langle m, n\rangle] \cdot_{\mathbb{Z}} [\langle r, s\rangle] \\ &= a \cdot_{\mathbb{Z}} b +_{\mathbb{Z}} a \cdot_{\mathbb{Z}} c. \end{aligned}$$

3. Anna kaava kokonaislukujen vähennyslaskulle:

$$[\langle m, n\rangle] - [\langle p, q\rangle] = ?$$

Tarkista, että vähennyslaskuoperaatio on hyvin määritelty.

Ratkaisu: Epäformaalisti pätee, että

$$(m-n)-(p-q)=m-n-p+q=(m+q)-(n+p),$$

joten määritellään vähennyslasku formaalisti kaavalla

$$[\langle m,n\rangle]-[\langle p,q\rangle]=[\langle m+q,n+p\rangle].$$

Tarkistetaan, että vähennyslaskuoperaatio on hyvin määritelty:

**Väite**: Jos $\langle m,n\rangle \sim \langle m',n'\rangle$ ja $\langle p,q\rangle \sim \langle p',q'\rangle$, niin $\langle m+q,n+p\rangle \sim \langle m'+q',n'+p'\rangle$.

**Todistus**: Oletuksen mukaan $m+n'=m'+n$ ja $p+q'=p'+q$. Tällöin luonnollisten lukujen yhteenlaskun vaihdannaisuuden ja liitännäisyyden sekä oletuksen nojalla saadaan

$$\begin{aligned}(m+q)+(n'+p') &= (m+n')+(p'+q)\\ &= (m'+n)+(p+q')\\ &= (m'+q')+(n+p),\end{aligned}$$

ja näin ollen väite pätee. $\square$

4. Osoita, että $a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}}$ kaikilla $a \in \mathbb{Z}$.

Ratkaisu: Lauseen 5ZD, yhteenlaskun liitäntälain sekä osittelulain avulla saadaan

$$\begin{aligned}a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} &= a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} +_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}\\ &= a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} +_{\mathbb{Z}} (a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} +_{\mathbb{Z}} -(a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}))\\ &= (a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} +_{\mathbb{Z}} a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}) +_{\mathbb{Z}} -(a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}})\\ &= a \cdot_{\mathbb{Z}} (0_{\mathbb{Z}} +_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}) +_{\mathbb{Z}} -(a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}})\\ &= a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} +_{\mathbb{Z}} -(a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}))\\ &= 0_{\mathbb{Z}}.\end{aligned}$$

Tehtävän voi ratkaista myös suoraan määritelmien perusteella: Kun $a = [\langle m,n\rangle]$, niin

$$\begin{aligned}a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} &= [\langle m,n\rangle] \cdot_{\mathbb{Z}} [\langle 0,0\rangle]\\ &= [\langle m\cdot 0+n\cdot 0, m\cdot 0+n\cdot 0\rangle]\\ &= [\langle m,n\rangle]\\ &= 0_{\mathbb{Z}}.\end{aligned}$$

5. Osoita, että kaikille $a, b \in \mathbb{Z}$ pätee

$$a \cdot_{\mathbb{Z}} (-b) = (-a) \cdot_{\mathbb{Z}} b = -(a \cdot_{\mathbb{Z}} b).$$

Ratkaisu: Koska kokonaislukujen osittelulain, lauseen 5ZD ja tehtävän 4 nojalla on

$$\begin{aligned} a \cdot_{\mathbb{Z}} b +_{\mathbb{Z}} a \cdot_{\mathbb{Z}} (-b) &= a \cdot_{\mathbb{Z}} (b +_{\mathbb{Z}} (-b)) \\ &= a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} \\ &= 0_{\mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

pätee $a \cdot_{\mathbb{Z}} (-b) = -(a \cdot_{\mathbb{Z}} b)$. Toisaalta tulon vaihdannaisuuden ja osittelulain sekä lauseen 5ZD ja tehtävän 4 nojalla on

$$\begin{aligned} a \cdot_{\mathbb{Z}} b +_{\mathbb{Z}} (-a) \cdot_{\mathbb{Z}} b &= b \cdot_{\mathbb{Z}} a +_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} (-a) \\ &= b \cdot_{\mathbb{Z}} (a +_{\mathbb{Z}} (-a)) \\ &= b \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} \\ &= 0_{\mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

joten pätee $(-a) \cdot_{\mathbb{Z}} b = -(a \cdot_{\mathbb{Z}} b)$.

6. Osoita, että kaikille $a, b, c \in \mathbb{Z}$ pätee

a) $a \cdot_{\mathbb{Z}} (b -_{\mathbb{Z}} c) = (a \cdot_{\mathbb{Z}} b) -_{\mathbb{Z}} (a \cdot_{\mathbb{Z}} c)$,

b) $a^2 -_{\mathbb{Z}} b^2 = (a +_{\mathbb{Z}} b) \cdot_{\mathbb{Z}} (a -_{\mathbb{Z}} b)$.

Ratkaisu: a) Vähennyslaskun määritelmän, kokonaislukujen osittelulain ja tehtävän 5 nojalla on

$$\begin{aligned} a \cdot_{\mathbb{Z}} (b -_{\mathbb{Z}} c) &= a \cdot_{\mathbb{Z}} (b +_{\mathbb{Z}} (-c)) \\ &= a \cdot_{\mathbb{Z}} b + a \cdot_{\mathbb{Z}} (-c) \\ &= (a \cdot_{\mathbb{Z}} b) +_{\mathbb{Z}} (-(a \cdot_{\mathbb{Z}} c)) \\ &= (a \cdot_{\mathbb{Z}} b) -_{\mathbb{Z}} (a \cdot_{\mathbb{Z}} c). \end{aligned}$$

b) Kohdan a), kokonaislukujen yhteenlaskun vaihdannaisuuden ja liitännäi-

syyden ja tulon vaihdannaisuuden sekä lauseen 5ZD avulla saadaan

$$\begin{aligned}
(a +_{\mathbb{Z}} b) \cdot_{\mathbb{Z}} (a -_{\mathbb{Z}} b) &= a \cdot_{\mathbb{Z}} (a -_{\mathbb{Z}} b) +_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} (a -_{\mathbb{Z}} b) \\
&= ((a \cdot_{\mathbb{Z}} a) -_{\mathbb{Z}} (a \cdot_{\mathbb{Z}} b)) + ((b \cdot_{\mathbb{Z}} a) -_{\mathbb{Z}} (b \cdot_{\mathbb{Z}} b)) \\
&= ((a \cdot_{\mathbb{Z}} a) -_{\mathbb{Z}} (b \cdot_{\mathbb{Z}} b)) +_{\mathbb{Z}} ((a \cdot_{\mathbb{Z}} b) -_{\mathbb{Z}} (a \cdot_{\mathbb{Z}} b)) \\
&= ((a \cdot_{\mathbb{Z}} a) -_{\mathbb{Z}} (b \cdot_{\mathbb{Z}} b)) +_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} \\
&= (a \cdot_{\mathbb{Z}} a) -_{\mathbb{Z}} (b \cdot_{\mathbb{Z}} b) \\
&= a^2 -_{\mathbb{Z}} b^2.
\end{aligned}$$