

Joukko-opin alkeet
Harjoitus 8
11.11.2010

1. Osoita, että kaikille $a, b, c \in \mathbb{Z}$ pätee

a) $a +_{\mathbb{Z}} b = b +_{\mathbb{Z}} a$,

b) $(a +_{\mathbb{Z}} b) +_{\mathbb{Z}} c = a +_{\mathbb{Z}} (b +_{\mathbb{Z}} c)$.

2. Osoita, että kaikille $a, b, c \in \mathbb{Z}$ pätee

a) $a \cdot_{\mathbb{Z}} b = b \cdot_{\mathbb{Z}} a$,

b) $(a \cdot_{\mathbb{Z}} b) \cdot_{\mathbb{Z}} c = a \cdot_{\mathbb{Z}} (b \cdot_{\mathbb{Z}} c)$,

c) $a \cdot_{\mathbb{Z}} (b +_{\mathbb{Z}} c) = (a \cdot_{\mathbb{Z}} b) +_{\mathbb{Z}} (a \cdot_{\mathbb{Z}} c)$.

3. Anna kaava kokonaislukujen vähennyslaskulle:

$$[\langle m, n \rangle] - [\langle p, q \rangle] = ?$$

Tarkista, että vähennyslaskuoperaatio on hyvin määritelty.

4. Osoita, että $a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}}$ kaikilla $a \in \mathbb{Z}$.

5. Osoita, että kaikille $a, b \in \mathbb{Z}$ pätee

$$a \cdot_{\mathbb{Z}} (-b) = (-a) \cdot_{\mathbb{Z}} b = -(a \cdot_{\mathbb{Z}} b).$$

6. Osoita, että kaikille $a, b, c \in \mathbb{Z}$ pätee

a) $a \cdot_{\mathbb{Z}} (b -_{\mathbb{Z}} c) = (a \cdot_{\mathbb{Z}} b) -_{\mathbb{Z}} (a \cdot_{\mathbb{Z}} c)$,

b) $a^2 -_{\mathbb{Z}} b^2 = (a +_{\mathbb{Z}} b) \cdot_{\mathbb{Z}} (a -_{\mathbb{Z}} b)$.