Joukko-opin alkeet
Harjoitus 11
2.12.2010
Ratkaisuehdotuksia (Jr)

1. Täydennä lemman 5RC todistus, ts. osoita, että joukossa $x +_{\mathbb{R}} y$ ei ole suurinta alkiota.

Ratkaisu: Olkoon $q + r \in x +_{\mathbb{R}} y$, missä $q \in x$ ja $r \in y$. Koska joukoissa x ja y ei ole suurinta alkiota, on olemassa sellaiset $q' \in x$ ja $r' \in y$, että $q < q'$ ja $r < r'$. Tällöin lauseen 5QJ nojalla

$$q + r < q' + r < q' + r' \in x +_{\mathbb{R}} y.$$

Siis joukossa $x +_{\mathbb{R}} y$ ei ole suurinta alkiota.

2. Oletetaan, että p on positiivinen rationaaliluku. Osoita, että jokaista reaalilukua x kohti on olemassa sellainen rationaaliluku $q \in x$, että $p + q \notin x$.

Ratkaisu: Todistetaan aluksi kaksi aputulosta.

Osoitetaan aluksi, että jos a ja b ovat kokonaislukuja ja a on positiivinen, niin $b < E(k) \cdot a$ jollakin $k \in \omega$. Harjoituksen 7 tehtävän 6 nojalla voidaan olettaa, että $a = [\langle m^+, 0 \rangle]$ jollakin $m \in \omega$. Olkoon $b = [\langle p, q \rangle]$. Nyt

$$\begin{aligned} b < E(k) \cdot a \text{ joss } & [\langle p, q \rangle] < [\langle k, 0 \rangle] \cdot [\langle m^+, 0 \rangle] \\ \text{joss } & p < km^+ + q. \end{aligned}$$

Tämä epäyhtälö on voimassa, kun tapauksessa $p < q$ valitaan $k = 0$, tapauksessa $p = q$ valitaan $k = 1$ ja tapauksessa $q < p$ valitaan $k = r^+$, missä r^{++} on se luonnollinen luku, jolle $q + r^+ = p$.

Osoitetaan sitten, että jos p ja r ovat rationaalilukuja ja p on positiivinen, niin $r < E(E(k)) \cdot p$ jollakin $k \in \omega$. Olkoot $p = [\langle a, b \rangle]$, missä $a, b > 0$, ja $r = [\langle c, d \rangle]$, missä $d > 0$. Nyt

$$\begin{aligned} r < E(E(k)) \cdot p \text{ joss } & [\langle c, d \rangle] < [\langle E(k), 1 \rangle] \cdot [\langle a, b \rangle] \\ \text{joss } & cb < E(k) \cdot ad. \end{aligned}$$

Koska ad on positiivinen kokonaisluku, väite seuraa edellä osoitetusta tuloksesta.

Osoitetaan nyt itse tehtävän väite. Olkoot p positiivinen rationaaliluku ja x reaaliluku. Tehdään vastaoletus: kaikilla $q \in x$ on $p+q \in x$. Koska $x \neq \emptyset$, on olemassa $q_0 \in x$. Siis

$$\begin{gathered} p+q_0 \in x, \\ p+(p+q_0) = 2p+q_0 \in x, \\ p+(2p+q_0) = 3p+q_0 \in x, \\ p+(3p+q_0) = 4p+q_0 \in x, \\ \vdots \end{gathered}$$

Induktiolla voidaan helposti todistaa, että $E(E(n)) \cdot p + q_0 \in x$ kaikilla $n \in \omega$. Olkoon nyt $r \in \mathbb{Q}$. Edellä osoitetusta tuloksesta seuraa, että olemassa sellainen $n \in \omega$, jolle $r - q_0 < E(E(n)) \cdot p$, jolloin $r < E(E(n)) \cdot p + q_0 \in x$. Siis $r \in x$, ja näin ollen $x = \mathbb{Q}$, mikä on ristiriita.

3. Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla x pätee $0 \leq_{\mathbb{R}} |x|$.

Ratkaisu: On osoitettava, että kaikilla reaaliluvuilla x pätee $0_{\mathbb{R}} \subseteq x \cup -x$. Olkoon siis $r < 0$ rationaaliluku. Jos $r \in x$, niin $r \in x \cup -x$. Oletetaan, että $r \notin x$. Tällöin $-r > 0 > r$ ja $-(-r) = r \notin x$, joten $r \in -x$.

4. Osoita, että jos $x <_{\mathbb{R}} y$, niin on olemassa sellainen rationaaliluku r, että

$$x <_{\mathbb{R}} E(r) <_{\mathbb{R}} y,$$

ts. kahden eri reaaliluvun välissä on rationaaliluku.

Ratkaisu: Oletetaan, että $x <_{\mathbb{R}} y$. Tällöin $x \subset y$, joten on olemassa sellainen rationaaliluku q, jolla $q \notin x$ ja $q \in y$. Koska joukossa y ei ole suurinta alkiota, pätee $q < r \in y$ jollakin rationaaliluvulla y. Osoitetaan nyt, että $x <_{\mathbb{R}} E(r) <_{\mathbb{R}} y$. Olkoon $p \in x$. Koska x on suljettu alaspäin, on $p < r$, joten $p \in E(r)$. Toisaalta $q \in E(r) \setminus x$. Siis $x \subset E(r)$ eli $x <_{\mathbb{R}} E(r)$. Olkoon sitten $p \in E(r)$. Tällöin $p < r \in y$. Koska y on suljettu alaspäin, on $p \in y$. Toisaalta $r \in y \setminus E(r)$. Siis $E(r) \subset y$ eli $E(r) <_{\mathbb{R}} y$.

5. Reaaliluvun x itseisarvo määriteltiin asettamalla $|x| = x \cup -x$. Mistä tiedämme, että $|x| \in \mathbb{R}$?

Ratkaisu: Reaaliluvuille x ja $-x$ pätee trikotomian ja reaalilukujen joukon järjestysrelaation määritelmän perusteella täsmälleen yksi seuraavista:

$$x \subset -x, \quad x = -x, \quad -x \subset x,$$

jolloin vastaavasti pätee

$$x \cup -x = -x, \quad x \cup -x = x = -x, \quad x \cup -x = x.$$

Siis $|x|$ on reaaliluku.

6. Osoita, että yhtälö

$$f(m,n) = 2^m(2n+1) - 1$$

määrittelee bijektion joukosta $\omega \times \omega$ joukkoon ω.

Ratkaisu: Osoitetaan, että f on injektio: Olkoot $m, m', n, n' \in \omega$ ja $f(m,n) = f(m',n')$. Tällöin $2^m(2n+1) = 2^{m'}(2n'+1)$. Jos $m < m'$, niin saadaan $2n+1 = 2^{m'-m}(2n'+1)$, missä vasen puoli on pariton ja oikea puoli parillinen, mikä on ristiriita. Oletus $m' < m$ johtaa vastaavasti ristiriitaan. On siis oltava $m = m'$, jolloin saadaan $2n+1 = 2n'+1$ eli $n = n'$.

Osoitetaan sitten, että f on surjektio: Olkoon $k \in \omega$. Jos k on parillinen, niin $k = 2p$ jollakin $p \in \omega$. Tällöin $f(0,p) = k$. Jos k on pariton, niin $k = 2p+1 = 2(p+1) - 1$ jollakin $p \in \omega$. Tässä $p+1$ voidaan esittää muodossa $p+1 = 2^r(2s+1)$ joillakin $r, s \in \omega$. Siis $f(r+1, s) = k$.

7. Todista lause 6A: Kaikilla joukoilla A, B ja C pätee:

a) $A \approx A$,

b) jos $A \approx B$, niin $B \approx A$,

c) jos $A \approx B$ ja $B \approx C$, niin $A \approx C$.

Ratkaisu: a) Identtinen kuvaus $id : A \to A$, $id(x) = x$, on selvästi bijektio.

b) Jos $f : A \to B$ on bijektio, niin $f^{-1} : B \to A$ on bijektio.

c) Jos $f : A \to B$ on bijektio ja $g : B \to C$ on bijektio, niin $g \circ f : A \to C$ on bijektio.