

Joukko-opin alkeet  
Harjoitus 11  
2.12.2010

1. Täydennä lemmän 5RC todistus, ts. osoita, että joukossa  $x +_{\mathbb{R}} y$  ei ole suurinta alkia.
2. Oletetaan, että  $p$  on positiivinen rationaaliluku. Osoita, että jokaista reaalilukua  $x$  kohti on olemassa sellainen rationaaliluku  $q \in x$ , että  $p + q \notin x$ .
3. Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla  $x$  pätee  $0 \leq_{\mathbb{R}} |x|$ .
4. Osoita, että jos  $x <_{\mathbb{R}} y$ , niin on olemassa sellainen rationaaliluku  $r$ , että

$$x <_{\mathbb{R}} E(r) <_{\mathbb{R}} y,$$

ts. kahden eri reaaliluvun välissä on rationaaliluku.

5. Reaaliluvun  $x$  itseisarvo määriteltiin asettamalla  $|x| = x \cup -x$ . Mistä tiedämme, että  $|x| \in \mathbb{R}$ ?
6. Osoita, että yhtälö

$$f(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1$$

määrittelee bijektion joukosta  $\omega \times \omega$  joukkoon  $\omega$ .

7. Todista lause 6A: Kaikilla joukoilla  $A, B$  ja  $C$  pätee:
  - a)  $A \approx A$ ,
  - b) jos  $A \approx B$ , niin  $B \approx A$ ,
  - c) jos  $A \approx B$  ja  $B \approx C$ , niin  $A \approx C$ .