Joukko-opin alkeet
Harjoitus 10
25.11.2010
Ratkaisuehdotuksia (Jr)

1. Osoita, että kaikilla rationaaliluvuilla $r$ pätee:

$$r <_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} \text{ joss } 0_{\mathbb{Q}} <_{\mathbb{Q}} -r.$$

Ratkaisu: Olkoon $r \in \mathbb{Q}$. Koska rationaalilukujen yhteenlasku säilyttää järjestyksen (lause 5QJ), niin

$$\begin{aligned} r <_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} &\text{ joss } r +_{\mathbb{Q}} (-r) <_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} (-r) \\ &\text{ joss } r +_{\mathbb{Q}} (-r) <_{\mathbb{Q}} -r +_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} \\ &\text{ joss } 0_{\mathbb{Q}} <_{\mathbb{Q}} -r. \end{aligned}$$

2. Todista kokonaislukujen yhteenlaskun supistussääntö (korollaari 5ZK (a)) lauseen 5ZD avulla lauseen 5ZJ asemesta.

Ratkaisu: Olkoot $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Lauseen 5ZD ja kokonaislukujen yhteenlaskun liitäntälain nojalla saadaan

$$\begin{aligned} a +_{\mathbb{Z}} c = b +_{\mathbb{Z}} c &\Rightarrow (a +_{\mathbb{Z}} c) +_{\mathbb{Z}} (-c) = (b +_{\mathbb{Z}} c) +_{\mathbb{Z}} (-c) \\ &\Rightarrow a +_{\mathbb{Z}} (c +_{\mathbb{Z}} (-c)) = b +_{\mathbb{Z}} (c +_{\mathbb{Z}} (-c)) \\ &\Rightarrow a +_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} = b +_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} \\ &\Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

3. Osoita, että rationaalilukujen joukon järjestys on *tiheä*, ts. jokaisen kahden eri rationaaliluvun välissä on rationaaliluku:

$$p <_{\mathbb{Q}} s \Rightarrow (\exists r)(p <_{\mathbb{Q}} r <_{\mathbb{Q}} s).$$

Ratkaisu: Olkoot $p, s \in \mathbb{Q}$, jolloin $r = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}s \in \mathbb{Q}$. Koska $p <_{\mathbb{Q}} s$, pätee

$$p = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p <_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}s <_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s = s,$$

joten $p <_{\mathbb{Q}} r <_{\mathbb{Q}} s$.

Toinen tapa: Olkoot $p = [\langle a, b\rangle]$ ja $s = [\langle c, d\rangle]$, missä $b, d > 0$. Tällöin

$$p <_{\mathbb{Q}} s \text{ joss } ad < bc \text{ joss } bc - ad \geq 1.$$

Toisaalta

$$p = [\langle 2ad, 2bd\rangle] \text{ ja } s = [\langle 2bc, 2bd\rangle],$$

jolloin

$$p <_{\mathbb{Q}} s \text{ joss } (2ad)(2bd) < (2bc)(2bd) \text{ joss } 2ad < 2bc.$$

Nyt $2ad < 2ad + 1$, ja $2ad + 1 < 2bc$, koska $2bc - 2ad = 2(bc - ad) \geq 2$. Kun valitaan $r = [\langle 2ad + 1, 2bd\rangle]$, pätee siis

$$p <_{\mathbb{Q}} r <_{\mathbb{Q}} s.$$

4. Olkoon $\mathbb{Q}' = \{[\langle m, n\rangle] \in \mathbb{Q} \mid m = np \text{ jollakin } p \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että $E\mathbb{Z} = \mathbb{Q}'$, missä $E$ on upotusfunktio $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.

Ratkaisu: Kaikilla $m \in \mathbb{Z}$ pätee $E(m) = [\langle m, 1\rangle] \in \mathbb{Q}'$, koska $m = 1 \cdot m$. Siis $E\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}'$. Olkoon sitten $a = [\langle m, n\rangle] \in \mathbb{Q}'$. Tällöin $m = np$ jollakin $p \in \mathbb{Z}$. Siis $a = [\langle np, n\rangle] = [\langle p, 1\rangle]$, koska $(np) \cdot 1 = p \cdot n$. Näin ollen $a = E(p)$, ja on osoitettu, että $\mathbb{Q}' \subseteq E\mathbb{Z}$.

5. Täydennä lauseen 5RB todistus, ts. osoita, että $\bigcup A$ on suljettu alaspäin ja siinä ei ole suurinta alkiota.

Ratkaisu: Osoitetaan ensin, että $\bigcup A$ on suljettu alaspäin. Olkoon $q \in \bigcup A$ ja $r < q$. Tällöin $q \in x$ jollakin $x \in \bigcup A$. Koska $x$ on suljettu alaspäin, on $r \in x$. Mutta tällöin $r \in \bigcup A$. Siis $\bigcup A$ on suljettu alaspäin.

Osoitetaan sitten, että joukossa $\bigcup A$ ei ole suurinta alkiota. Tehdään vastaoletus: joukossa $\bigcup A$ on suurin alkio $q$. Siis $q \in \bigcup A$, joten $q \in x$ jollakin $x \in \bigcup A$. Mutta tällöin $q$ on Dedekindin leikkauksen $x$ suurin alkio, mikä on ristiriita. Siis joukossa $\bigcup A$ ei ole suurinta alkiota.

6. Hahmottele todistus, että $\mathbb{Q}$ on numeroituva, ts. että on olemassa bijektio $\omega \to \mathbb{Q}$.

Ratkaisu: Tässä todistus kurssikirjan sivulta 130. Järjestetään rationaaliluvut (tai niiden edustajat, joiden nimittäjä on positiivinen) kaavioksi oheisen kuvan mukaisesti. Aloitetaan kulku kaaviossa rationaaliluvusta $0/1$ ja merkitään sen viereen sahasulkeisiin luonnollinen luku 0. Kuljetaan kaaviossa nuolten mukaan merkiten kulun aikana rationaaliluvun viereen hakasulkeisiin seuraava luonnollinen luku, mikäli samaan rationaalilukuun ei ole kulussa siihen mennessä vielä törmätty. Tämä kulku määrittelee funktion $f : \omega \to \mathbb{Q}$. Siis $f(0) = 0/1$, $f(1) = 1/1$, $f(2) = 1/2$, $f(3) = -1/2$ , $f(4) = -1/1$, $f(5) = -2/1$, $f(6) = -2/3$ jne. Funktion $f$ konstruktio takaa, että $f$ on sekä injektio että surjektio, ts. bijektio.