

Joukko-opin alkeet
Harjoitus 10
25.11.2010

1. Osoita, että kaikilla rationaaliluvuilla r pätee:

$$r <_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} \text{ joss } 0_{\mathbb{Q}} <_{\mathbb{Q}} -r.$$

2. Todista kokonaislukujen yhteenlaskun supistussääntö (korollaari 5ZK (a)) lauseen 5ZD avulla lauseen 5ZJ asemesta.

3. Osoita, että rationaalilukujen joukon järjestys on *tiheä*, ts. jokaisen kahden eri rationaaliluvun välissä on rationaaliluku:

$$p <_{\mathbb{Q}} s \Rightarrow (\exists r)(p <_{\mathbb{Q}} r <_{\mathbb{Q}} s).$$

4. Olkoon $\mathbb{Q}' = \{[m, n] \in \mathbb{Q} \mid m = np \text{ jollakin } p \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että $E\mathbb{Z} = \mathbb{Q}'$, missä E on upotusfunktio $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$.

5. Täydennä lauseen 5RB todistus, ts. osoita, että $\bigcup A$ on suljettu alaspäin ja siinä ei ole suurinta alkioita.

6. Hahmottele todistus, että \mathbb{Q} on numeroituva, ts. että on olemassa bijektio $\omega \rightarrow \mathbb{Q}$.