

Henkivakuutusmatematiikan laskuharjoitus 10, 9.12.2010

Huom. Ma 13.12. klo 16-18 on ylimääräinen luento, sali C123.

1. Tarkastellaan kilpailevien kuolinsyiden teorian mukaista asetelmaa Markov-prosessina, jossa tila 0 tarkoittaa elossa olevaa ja tila j syyhyn j kuollutta, $j = 1, \dots, n$. Hypoteettiset syittäiset elinajat T_1, \dots, T_n oletetaan toisistaan riippumattomiksi. Olkoon μ_j elinaikaan T_j liittyvä kuolevuus, $j = 1, \dots, n$. Määrää siirtymäintensiteetit $\mu_{jk}, j, k \in \{0, 1, \dots, n\}, j \neq k$, kun henkilö on x -ikäinen hetkellä nolla.

2. (jatkoa) Kirjoita forward-yhtälöt todennäköisyyksien $P_{0k}(t, u)$ ratkaisemiseksi, kun $0 \leq t < u$. Onko näillä yhteys lauseen 3.4 tulokseen.

3. Yhtiö maksaa sairausvakuutuksen perusteella seuraavan vuoden aikana korvauksen a/N jokaisena sellaisena hetkenä n/N , jona vakuutettu on sairas $n = 1, \dots, N$ ($N \in \mathbb{N}$ ja $a > 0$ oletetaan kiinteiksi sopimuksen mukaisiksi parametreiksi). Mallinnetaan vakuutetun tila Markov-prosessiksi, jossa mahdollisia tiloja ovat 'terve' ja 'sairas' (kuolevuus tarkasteltavalla ikävälillä oletetaan nolaksi). Oletetaan, että terve sairastuu intensiteetillä σ ja että sairas paranee intensiteetillä τ , missä σ ja τ ovat positiivisia vakioita. Määrää kokonaiskorvauksen odotusarvo, kun vakuutettu on vuoden alussa terve. Määrää myös kyseisen odotusarvon raja-arvo, kun $N \rightarrow \infty$. Mikä on raja-arvon tulkinta.

4. Markov-prosessin Z tila-avaruus olkoon $E = \{1, \dots, N\}$. Siirtymäintensiteetit $\mu_{jk}, j, k \in E$ oletetaan jatkuviksi. Oletetaan, että on olemassa sellainen tila $k \in E$, että

$$\int_0^\infty \mu_{1k}(s) ds = \infty.$$

Oletetaan lisäksi, että $\mu_{j1}(u) = 0$ kaikilla $j \neq 1$ ja $u \geq 0$. Osoita, että

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z(u) = 1 \mid Z(0) = 1) = 0.$$

5. Markov-prosessin Z tila-avaruus olkoon $E = \{1, \dots, N\}$. Siirtymäintensiteetit $\mu_{jk}, j, k \in E$ oletetaan jatkuviksi. Oletetaan, että intensiteetit $\mu_{j,j+1}$ ja μ_{kN} ovat positiivisia funktioita kaikilla $j = 1, \dots, N-2$ ja $k = 1, \dots, N-1$. Muut intensiteetit ovat nolliä. Kirjoita Kolmogorovin forward-yhtälöt todennäköisyyksille $\mathbb{P}(Z(t) = j \mid Z(0) = 1)$, $j = 1, \dots, N$. Esitä sellainen rekursiivinen menetelmä yhtälöryhmän ratkaisemiseksi, jossa kussakin vaiheessa ratkaistaan ensimmäisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö.