HY, Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syyslukukausi 2010
Dos. Jari Taskinen

POTENSSISARJAMENETELMÄ TOISEN KERTALUVUN LINEAARISILLE DIFFERENTIAALIYHTÄLÖILLE

1. Kertausta potenssisarjojen määrittelemistä funktioista. Seuraavassa $x \in \mathbb{R}$ on muuttuja, sekä piste ("keskipiste") $x_0 \in \mathbb{R}$ ja luvut ("kertoimet") $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ annettuja. Potenssisarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{0.1}$$

suppenee itseisesti välillä ("suppenemisvälillä") $I :=]x_0 - R, x_0 + R[$, missä $0 \leq R \leq \infty$ on sarjan suppenemissäde. (Oletamme jatkossa että $R > 0$ käsittelemillemme sarjoille.) Suppeneminen on tasaista jokaisella I:n kompaktilla osavälillä. Myös seuraavat sarjat ovat potenssisarjoja

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^k \ , \ x + \sum_{n=2}^{\infty} n^4 x^{n-1} \ , \ \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+1} \ , \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^{2n}; \tag{0.2}$$

polynomit ovat potenssisarjoja, joilla on vain äärellinen määrä nollasta poikkeavia kertoimia. Seuraava ei ole potenssisarja:

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^n. \tag{0.3}$$

Sarja (0.1) määrittelee x:n funktion $f(x)$. Se on joukossa I mielivaltaisen monta kertaa jatkuvasti derivoituva. Derivointi voidaan suorittaa termeittäin; pätee

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n, \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x - x_0)^n, \end{aligned} \tag{0.4}$$

ja niin edelleen. Derivoitujen sarjojen suppenemissäde on sama kuin alkuperäisen.

Esimerkki. Sievennä, eli esitä potenssisarjana lauseke

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^{n-1}. \tag{0.5}$$

Ratkaisu. Kirjoitetaan tämä muodossa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n-1}{n+2} + \frac{1}{(n+1)^2} \Big) x^n, \tag{0.6}$$

missä vakio 1 tuli jälkimmäisen sarjan alimman asteen termistä. Annettu lauseke oli siis muotoa (0.1), missä $x_0 = 0$, $a_0 = 1$ sekä

$$a_n = \frac{n-1}{n+2} + \frac{1}{(n+1)^2},$$

kun $n \geq 1$.

Esimerkki. Esitä potenssisarjana lauseke

$$(2 + x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n. \tag{0.7}$$

Ratkaisu. Tämä on yhtä kuin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^n$$

$$= 2 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{2}{n!} + \frac{1}{(n-2)!} \Big) x^n \tag{0.8}$$

sillä $0! = 1$.

Potenssisarjoja, joilla on sama keskipiste, voidaan laskea yhteen. Ne voidaan myös kertoa käyttäen kaavaa (kun $x_0 = 0$; yleinen tapaus vastaavasti)

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \Big) x^n. \tag{0.9}$$

Sekä summan että tulon tapauksessa saadun sarjan suppenemissäde on vähintään pienempi alkuperäisten sarjojen suppenemisäteistä.
Potenssisarjojen käyttö differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa perustuu kertoimien yksikäsitteisyystulokseen. Oletetaan, että sarjan (0.1) suppenemissäde on $R > 0$ ja että f on ko. sarjan määrittelemä funktio. Tällöin sarjan kertoimet ovat

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \tag{0.10}$$

missä $f^{(n)}$ on funktion f n:s derivaatta. Tästä saadaan seuraava tulos. Jos I on sarjojen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ suppenemisväli ja pätee

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \tag{0.11}$$

kaikilla $x \in I$, niin tällöin $a_n = b_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Erityisesti, jos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = 0 \tag{0.12}$$

välillä I, niin $a_n = 0$ kaikilla n

Esimerkki. Sovelletaan potenssisarjamenetelmää ensimmäisen kertaluvun yhtälöön

$$y' - 2xy = 0. \tag{0.13}$$

(Tämän ratkaisu on tietysti muutenkin tiedossa: se on $y(x) = Ce^{x^2}$, misssä C on vapaasti valittava vakio. Gaussisen funktion Taylor-sarja pisteessä 0 on

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}. \tag{0.14}$$

Palataan tähän vielä vertailun vuoksi.)
Tehdään yhtälöön (0.13) potenssisarjayrite $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Saadaan

$$\begin{aligned} 0 = y' - 2xy &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} \\ &= a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+2) a_{n+2} - 2a_n \Big) x^{n+1}. \end{aligned} \tag{0.15}$$

Kertoimien yksikäsitteisyyden nojalla saadaan $a_1 = 0$ sekä kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2) a_{n+2} - 2a_n = 0 \quad \text{eli} \quad a_{n+2} = \frac{2}{n+2} a_n. \tag{0.16}$$

Koska $a_1 = 0$, seuraa kaavasta (0.16) induktiolla $a_3 = 0 = a_5 = a_7 = \ldots$, eli kaikki parittomat kertoimet ovat nollia. Kerroin a_0 voidaan ottaa vapaaksi parametriksi, minkä jälkeen johdetaan kaava parillisille kertoimille:

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{2a_{2(n-1)}}{2n} = \frac{2 \cdot 2a_{2(n-2)}}{2n(2n-2)} = \ldots \\ &= \frac{2^n a_0}{2n \cdot 2(n-1) \cdot 2(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{a_0}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{a_0}{n!}. \end{aligned} \tag{0.17}$$

Vertaamalla kaavaan (0.14) nähdään, että saatiin sama ratkaisu Ce^{x^2}, kun vakio C on a_0 (kumpikin voitiin valita vapaasti).

2. Sovellutuksia toisen kertaluvun lineaarisiin differentiaaliyhtälöihin.

Tarkastelemme yhtälöä

$$L(x) y''(x) + M(x) y'(x) + N(x) y(x) = 0, \tag{0.18}$$

missä $x \in I$ ja L, M ja N ovat annettuja kerroinfunktioita, jotka seuraavassa ovat yleensä polynomeja tai analyyttisiä I:ssä (niillä on I:ssä suppeneva potenssisarja). Jakamalla yhtälö funktiolla L saadaan yhtälö

$$y''(x) + P(x) y'(x) + Q(x) y(x) = 0, \tag{0.19}$$

mutta tämä on määritelty yleensä vain jossain I:n osajoukossa, sillä emme sulje pois mahdollisuutta, että L:llä on nollakohtia välillä I. Tällöin P:llä tai Q:lla voi olla nimittäjän nollakohtia.

Määritelmä. Jos P ja Q ovat analyyttisiä pisteessä $x_0 \in I$, sanomme, että x_0 on *säännöllinen piste*, muussa tapauksessa se on *singulaarinen piste*.

Jos $L(x_0) \neq 0$, piste on säännöllinen. Jos $L(x_0) = 0$, piste voi olla säännöllinen tai singulaarinen, riippuen siitä, onko funktioilla M ja N myös nollakohta x_0:ssa ja mikä on nollakohdan kertaluku.
Esimerkkeinä ovat Legendren yhtälö

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0 \tag{0.20}$$

ja Besselin yhtälö

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - r^2)y = 0, \tag{0.21}$$

missä m ja r ovat reaalisia, ei-negatiivisia parametreja. Piste 0 on säännöllinen edelliselle, mutta singulaarinen jälkimmäiselle yhtälölle.

Lause. *Jos y_1 ja y_2 ovat yhtälön* (0.18) *(tai yhtä hyvin yhtälön* (0.19)*) ratkaisuja, jotka toteuttavat jossain pisteessä $x_0 \in I$ alkuehdot*

$$y_1(x_0) = 1 \ , y_1'(x_0) = 0 \ , y_2(x_0) = 0 \ , y_2'(x_0) = 1 \ , \tag{0.22}$$

niin nämä muodostavat ratkaisujen perusjärjestelmän.

On nimittäin helppo todeta, että pisteessä x_0 Wronskin determinantti ei ole nolla, kun ehdot (0.22) pätevät.

Lause. *Oletetaan, että $x_0 \in I$ on yhtälön* (0.19) *säännöllinen piste, ja että luvut a, $b \in \mathbb{R}$ ovat annettuja. Tällöin yhtälöllä* (0.19) *on (yksikäsitteinen) ratkaisu, joka voidaan kirjoittaa potenssisarjana ja joka toteuttaa ehdot*

$$y(x_0) = a \ , \ y'(x_0) = b. \tag{0.23}$$

Sarjan suppenemissäde on vähintään pienempi P:n ja Q:n sarjaesitysten suppenemissäteistä pisteessä x_0.

Todistus sivuutetaan. OY-lauseesta seuraa alkuarvotehtävän ratkaisun olemassaolo ylipäätään, mutta jäljelle jää osoittaa, että se voidaan kirjoittaa potenssisarjana $y(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ ja että suppenemissäde toteutta väitteen. Oletetaan seuraavassa, että $x_0 = 0$ ja että

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad , \quad Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n. \tag{0.24}$$

Tällöin ratkaisun y kertoimille a_n voidaan johtaa yleinen palautuskaava

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)}\Big(\sum_{k=0}^{n}(k+1)p_{n-k}a_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k\Big) \ , \tag{0.25}$$

joka pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Yleisessä muodossaan tämä on kuitenkin aivan liian monimutkainen, että siitä voitaisiin esimerkiksi johtaa ratkaisun eksplisiittinen lauseke.

Esimerkki. Tarkastellaan yhtälöä

$$(1 - x^3)y'' + 6xy = 0 \tag{0.26}$$

pisteen 0 ympäristössä. Yleisen ratkaisukaavan (0.25) soveltaminen edellyttäisi, että yhtälö (0.26) jaetaan polynomilla $1-x^3$ ja sen jälkeen funktio $1/(1-x^3)$ kehitetään potenssisarjaksi pisteessä 0. On kuitenkin helpompaa johtaa sarjaratkaisun kertoimille palautuskaava tekemällä sarjayrite suoraan yhtälöön (0.26). Saadaan

$$\begin{aligned}
0 &= y'' - x^3y'' + 6xy \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=3}^{\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 6a_{n-1}x^n \\
&= 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2} - \big((n-1)(n-2)-6\big)a_{n-1}\Big)x^n \\
&= 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-4)(n+1)a_{n-1}\Big)x^n. \qquad (0.27)
\end{aligned}$$

Kertoimien yksikäsitteisyydestä saamme $a_2 = 0$ ja

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-4)(n+1)a_{n-1} = 0$$

eli

$$a_{n+2} = \frac{n-4}{n+2}a_{n-1}, \tag{0.28}$$

kun $n \geq 1$. Palautuskaava ja tieto kertoimesta a_2 antaa

$$0 = a_5 = a_8 = a_{11} = \dots\ , \text{ eli } a_{2+3k} = 0 \tag{0.29}$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Indekseille $n = 1 + 3k$ saadaan

$$a_{1+3k} = \frac{3k-5}{3k+1}\cdot\frac{3k-8}{3k-2}\cdot\frac{3k-11}{3k-5}\cdot\frac{3k-14}{3k-8}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{-2}{4}a_1. \tag{0.30}$$

Tästä supistuu pois kaikki muu paitsi kaksi ensimmäistä nimittäjää ja kaksi viimeistä osoittajaa, joten jää

$$a_{1+3k} = -\frac{2}{(3k+1)(3k-2)}a_1\ , \quad k \geq 1. \tag{0.31}$$

Muotoa $n = 3k$ olevat indeksit käsitellään myös kaavalla (0.28): kerroin a_0 voidaan valita vapaasti, sen jälkeen pätee

$$a_3 = -a_0\ ,\ a_6 = 0 = a_9 = a_{12} = \dots. \tag{0.32}$$

Yleinen ratkaisu yhtälölle (0.26) pisteen 0 ympäristössä on

$$y(x) = a_0(1-x^3) - 2a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k+1}}{(3k+1)(3k-2)}. \tag{0.33}$$

Sarjan suppenemissäde on 1; vrt. huomautus kaavan (0.23) jälkeen.

Esimerkki. Tarkastellaan nyt Legendren yhtälöä (0.20), eli $(1-x^2)y''-2xy'+m(m+1)y=0$. Sarjayritteellä saadaan

$$\begin{aligned}
0 &= y''-x^2y''-2xy'+m(m+1)y \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^n \\
&\quad -\sum_{n=0}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}m(m+1)a_nx^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2}+\big(m(m+1)-n(n-1)-2n\big)a_n\Big)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2}+(m-n)(m+n+1)a_n\Big)x^n. \qquad (0.34)
\end{aligned}$$

Tästä seuraa palautuskaava

$$a_{n+2}=\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n\ ,\ n\geq 0, \qquad (0.35)$$

ja nähdään, että a_0 ja a_1 voidaan valita vapaasti, minkä jälkeen parilliset kertoimet määräytyvät edellisestä ja parittomat jälkimmäisestä. Tarkemmin sanoen, voidaan johtaa kaavat

$$a_{2n+j}=(-1)^nC_{2n+j}a_j\quad ,\ j=0,1, \qquad (0.36)$$

missä $C_0=C_1=1$ ja

$$C_{2n}=\frac{m(m-2)\dots(m-2n+2)(m+1)(m+3)\dots(m+2n-1)}{(2n)!}, \qquad (0.37)$$

$$C_{2n+1}=\frac{(m-1)(m-3)\dots(m-2n+1)(m+2)(m+4)\dots(m+2n)}{(2n+1)!}. \qquad (0.38)$$

Tarkastellaan vielä tapausta, että m on luonnollinen luku, esimerkiksi parillinen. Valitaan lisäksi $a_1=0$. Tällöin parittomat kertoimet ovat nollia ja lisäksi ratkaisun sarjaesitys katkeaa: palautuskaavan (0.35) mukaan kerroin a_{m+2} ja sitä korkeammat ovat nollia. Vastaavaa ratkaisua kutsutaan m:n asteen Legendren polynomiksi.

3. Eulerin ja Besselin yhtälöt. Edellisessä kappaleessa tarkasteltiin sarjaratkaisuja säännöllisten pisteiden ympäristössä. Tutkitaan seuraavassa ratkaisuja singulaarisen pisteen $x_0:=0$ ympäristössä. Ensimmäisenä esimerkkinä on Eulerin yhtälö, joka on muotoa

$$x^2y''+pxy'+qy=0; \qquad (0.39)$$

tässä p ja q ovat vakioita. Jos yhtälö saatetaan muotoon (0.19), kerroinfunktiot P ja Q eivät ole analyyttisiä pisteessä 0, ja edellä kuvailtu sarjamenetelmä ei toimi. (Huomautus. Otetaan jatkossa käyttöön operaattorimerkintä $Ly=x^2y''+pxy'+qy$ eli $Ly(x)=x^2y''(x)+pxy'(x)+qy(x)$. Yhtälö (0.39) voidaan silloin kirjoittaa lyhyesti $Ly=0$.)

Etsitään ratkaisua muodossa $y(x) = x^s$, missä $s \in \mathbb{R}$. Sijoittamalla yhtälöön (0.39) saadaan

$$(0.40) 0 = x^2y'' + pxy' + qy = \big(s(s-1) + ps + q\big)x^s = \big(s^2 + (p-1)s + q\big)x^s.$$

Merkitään $I(s) := s^2 + (p-1)s + q$, joka on s:n polynomi astetta 2. Sanotaan tätä indisiaalipolynomiksi, paremman suomennoksen puutteessa. Jos s voidaan valita niin, että $I(s) = 0$, on funktio x^s Eulerin yhtälön ratkaisu. Jos I:llä on kaksi reaalista nollakohtaa $s_1 \neq s_2$, on (0.39):n yleinen ratkaisu

$$y(x) = C_1x^{s_1} + C_2x^{s_2}. \tag{0.41}$$

Mikäli s_1 ja s_2 eivät satu olemaan positiivisia kokonaislukuja, ratkaisu (0.41) on määritelty vain alueessa $\{x > 0\}$ tai $\{x \neq 0\}$. Ratkaisu voidaan itse asiassa aina määritellä negatiivisillekin x:n arvoille muodossa

$$y(x) = C_1|x|^{s_1} + C_2|x|^{s_2}. \tag{0.42}$$

Yleensä ratkaisu ei siis ole määritelty pisteessä 0; kuitenkin sen käyttäytyminen 0:n ympäristössä on näin saatu selville.
Tarkastellaan vielä tapausta, että indisiaalipolynomilla on kaksinkertainen reaalijuuri s_1, eli $I(s) = C(s-s_1)^2$. Oletetaan, että $x > 0$. Yrite $y(x) = x^s$ yhtälössä (0.40) johtaa yhtälöön

$$0 = Ly = Lx^s = (s - s_1)^2x^s. \tag{0.43}$$

Yllä olevalla menetelmällä löydämme vain yhden ratkaisun $y_1 = x^{s_1}$. Tarkastellaan funktiota

$$\frac{\partial}{\partial s}x^s = x^s \ln x. \tag{0.44}$$

Tälle pätee

$$L\frac{\partial}{\partial s}x^s = \frac{\partial}{\partial s}Lx^s = 2(s-s_1)x^s + (s-s_1)^2x^s \ln x; \tag{0.45}$$

nähdään jälleen, että jos $s := s_1$, tämä häviää. Löysimme toisen ratkaisun $y_2 := x^{s_1} \ln x$, joka on lineaarisesti riippumaton funktiosta y_1.

Lause. *Eulerin yhtälön ratkaisujen perusjärjestelmä on*
a) $|x|^{s_1}$, $|x|^{s_2}$, *mikäli indisiaalipolynomilla* I *on erilliset reaaliset nollakohdat* s_1 *ja* s_2,
b) $|x|^{s_1}$, $|x|^{s_1} \ln |x|$, *mikäli* I*:llä on kaksinkertainen (reaalinen) nollakohta* s_1,
c) $|x|^{\alpha} \cos(\beta \ln |x|)$, $|x|^{\alpha} \sin(\beta \ln |x|)$, *mikäli* I*:llä on kompleksiset nollakohdat* $\alpha \pm i\beta$.

Esimerkki. Jos Eulerin yhtälö on muotoa

$$x^2y'' + 5xy + 3y = 0, \tag{0.46}$$

edellä esitetty menetelmä antaa yleisen ratkaisun

$$y(x) = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{1}{x^3}. \tag{0.47}$$

Tämä on yhtälön täydellinen ratkaisu jokaisella $\mathbb{R}$:n avoimella osavälillä, joka ei sisällä pistettä 0. Lisäksi se kertoo tarkasti, kuinka ratkaisut käyttäytyvät, kun

$x \to 0$. Huomataan, että aiemmin esitetty potenssisarjamenetelmä (keskipisteenä 0) ei voi tässä tapauksessa sellaisenaan toimia, koska potenssisarjaratkaisulla ei voi olla kaavassa (0.47) esiintyvää singulariteettia, kun $x = 0$.

Tarkastellaan yleisempää tapausta, jossa esiintyy singulaarinen piste:

$$x^2y''(x) + xp(x)y' + q(x)y = 0, \tag{0.48}$$

missä oletetaan, että p ja q ovat analyyttisiä tarkastelupisteen $x_0 = 0$ ympäristössä. Tällöin ratkaisua voidaan etsiä *Frobeniuksen menetelmällä*, joka on tavallaan yhdistelmä sarjamenetelmästä sekä Eulerin yhtälön yhteydessä käytetystä yritteestä: ratkaisua lähdetään etsimään muodossa

$$y(x) := y(s,x) := x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}, \tag{0.49}$$

missä $a_0 \neq 0$. Tarkastellaan asiaa esimerkin valossa.

Esimerkki. Yhtälö $2xy'' + y' - 4y = 0$ voitaisiin saattaa muotoon (0.48) kertomalla se tekijällä $x/2$, mutta käytetään mieluummin muotoa

$$2x^2y'' + xy' - 4xy = 0. \tag{0.50}$$

Derivoidaan yritettä (0.49) termeittäin:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(s+n)a_n x^{s+n-1}\ ,\ y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(s+n)(s+n-1)a_n x^{s+n-2}, \tag{0.51}$$

ja kirjoitetaan (nämä kannattaa myös muistaa)

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty}(s+n)a_n x^{s+n}\ ,\ x^2y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(s+n)(s+n-1)a_n x^{s+n}. \tag{0.52}$$

Sijoitetaan yritteemme yhtälöön (0.50) ja käytetään merkintää

$$I(t) = 2t(t-1) + t = t(2t-1), \tag{0.53}$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(2(s+n)(s+n-1) + (s+n)\Big)a_n x^{s+n} - 4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} I(s+n)a_n x^{s+n} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n+1} \\ &= I(s)a_0x^s + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(I(s+n)a_n - 4a_{n-1}\Big)x^{s+n}. \end{aligned} \tag{0.54}$$

Vaikka tämä lauseke ei olekaan potenssisarja, jokaista termiä x^{s+n} vastaava kerroin täytyy olla 0 (mieti, miksi). Alimman asteen kertoimesta saadaan *indisiaaliyhtälö*

$$I(s) = s(2s-1) = 0; \tag{0.55}$$

funktio $I(s)$ on nimeltään *indisiaalipolynomi*.

Ratkaiseminen etenee niin, että yhtälöstä (0.55) saadaan parametrille s arvot 0 ja 1/2. Muista kertoimista saadaan palautuskaava

$$a_n = \frac{4}{(s+n)(2s+2n-1)} a_{n-1}\,, \tag{0.56}$$

missä $n = 1, 2, 3, \ldots$. Tapauksessa $s = 0$ voidaan johtaa lauseke

$$a_n = \frac{8^n}{(2n)!} a_0,$$

ja valitsemalla $a_0 = 1$ saadaan ratkaisu

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{(2n)!} x^n. \tag{0.57}$$

Vastaavasti s:n arvo 1/2 johtaa ratkaisuun

$$y_1(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{(2n+1)!} x^n. \tag{0.58}$$

Nämä muodostavat perusjärjestelmän.

Frobeniuksen menetelmässä toimitaan yleisesti seuraavasti: otetaan yhtälö (0.48) sellaisenaan tai mahdollisesti kerrotaan se analyyttisellä funktiolla B muotoon

$$B(x)x^2y'' + C(x)xy' + D(x)y = 0, \tag{0.59}$$

missä myös C ja D ovat analyyttisiä 0:n ympäristössä. (Pyritään saamaan kertoinfunktiot mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon, poistamaan nimittäjät jne.). Tekemällä sijoitus (0.49) saadaan yhtälö, joka on muotoa

$$A_0(s)x^s + A_1(s)x^{s+1} + A_2(s)x^{s+2} + \ldots = 0, \tag{0.60}$$

missä A_0 on toisen asteen polynomi s:lle. Indisiaaliyhtälö on $A_0(s) = 0$. Jos tällä on reaaliset ratkaisut $s_1 \geq s_2$, niin yhtälön (0.48) yksi ratkaisu löydetään aina asettamalla $s = s_1$ kaavassa (0.60) ja vaatimalla (kuten potenssisarjamenetelmässä), että kertoimet toteuttavat $A_j = 0$, $j = 1, 2, 3, \ldots$: tästä saadaan palautuskaava kertoimille a_j yritteessä (0.49) ja tästä siis (0.48):n ratkaisu

$$y_1(x) := y(s_1, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s_1)x^{s+n}. \tag{0.61}$$

Menetelmä toistetaan arvolla $s = s_2$ toisen ratkaisun y_2 löytämiseksi, jos se on mahdollista. Seuraava esimerkki osoittaa, että näin ei aina ole. Lisäksi on tietysti mahdollista, että indisiaaliyhtälön juuri on kaksinkertainen, kuten näimme Eulerin yhtälön tapauksessa.

Esimerkki. Tarkastellaan yhtälöä $xy'' + y = 0$. Tämä kerrotaan ensin funktiolla x, jolloin se on muotoa (0.48): $x^2y'' + xy = 0$. Yrite (0.49) johtaa yhtälöön

$$0 = s(s-1)a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big((s+n)(s+n-1)a_n + a_{n-1}\Big)x^{s+n}. \tag{0.62}$$

Indisiaaliyhtälö on $I(s) = s(s-1) = 0$, ja sen juuret ovat $s_1 = 1$ ja $s_2 = 0$. Jälkimmäisessä tapauksessa saadaan palautuskaava

$$n(n-1)a_n = -a_{n-1}, \tag{0.63}$$

jonka pitäisi päteä kaikilla $n \geq 1$. Muistutetaan, että oli voimassa vaatimus $a_0 \neq 0$. Tällöin kaava (0.63) johtaa mahdottomaan vaatimukseen $0 \cdot a_1 = -a_0$ indeksin n arvolla $n = 1$. Parametriä s_2 vastaavaa Frobeniuksen ratkaisua ei ole, mutta parametrille s_1 se voidaan muodostaa (harjoitustehtävä).

Indisiaalipolynomin pienempään reaaliseen nollakohtaan s_2 liittyy omat tarkastelunsa, joiden yksityiskohdat sivuutetaan tässä (ne löytyvät kurssin oheislukemistosta). Todetaan lyhyesti, että

– mikäli $s_1 \neq s_2$ ja $s_1 - s_2$ ei ole kokonaisluku, niin vaatimalla $A_n(s_2) = 0$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ kaavassa (0.60), saadaan kertoimille a_n palautuskaava, josta ne voidaan määrätä (kuten parametrin arvolle $s = s_1$). Saadaan toinen ratkaisu $y_2(x) := y(s_2, x)$.

– jos $s_1 = s_2$, ratkaisu y_2 saadaan kaavasta

$$y_2(x) = y(s_1, x) \ln|x| + |x|^{s_1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(s_1)|x|^n, \tag{0.64}$$

missä $a_n'(s)$ tarkoittaa derivaattaa s:n suhteen.

– tapaus $s_1 \neq s_2$ ja $s_1 - s_2$ on kokonaisluku vaatii erillisen käsittelyn, koska edellä kuvaillut menetelmät toisen ratkaisun löytämiseksi eivät yleensä toimi. Tämä sivuutetaan.

Tarkastellaan vielä Besselin yhtälöä

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - r^2)y = 0, \tag{0.65}$$

missä $r \geq 0$ on parametri. Frobeniuksen yrite (0.49) johtaa yhtälöön

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \Big((s+n)(s+n-1) + (s+n) - r^2\Big)a_n x^{n+s} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big((s+n)^2 - r^2\big)a_n x^{n+s} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n} = 0, \end{aligned} \tag{0.66}$$

missä ensimmäinen summalauseke tuli termeistä x^2y'', xy' ja r^2y ja toinen termistä x^2y. Kirjoitetaan (0.66) muodossa

$$\begin{aligned} &(s^2 - r^2)a_0x^s + \big((s+1)^2 - r^2\big)a_1x^{s+1} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\big((s+n)^2 - r^2\big)a_n + a_{n-2}\Big)x^{s+n} = 0. \end{aligned} \tag{0.67}$$

Nähdään, että indisiaaliyhtälö on

$$I(s) = s^2 - r^2 = 0 \quad , \quad \text{ratkaisuina} \quad s = \pm r, \tag{0.68}$$

ja palautuskaava korkeammille kertoimille on

$$a_n = -\frac{1}{(s+n)^2 - r^2} a_{n-2} \quad , \quad n \geq 2. \tag{0.69}$$

Aiemman perusteella löydämme aina yhden ratkaisun palautuskaavaa käyttäen asettamalla $s = s_1 := r$. Tällöin a_0 voidaan valita vapaasti, mutta termin x^{s+1} kertoimesta saadaan

$$0 = \big((s_1+1)^2 - r^2\big)a_1 = \big((r+1)^2 - r^2\big)a_1 = (2r+1)a_1, \tag{0.70}$$

ja koska $2r + 1 \neq 0$, täytyy olla $a_1 = 0$. Palautuskaavan takia saadaan $a_n = 0$ kaikilla parittomilla n. Parillisille $n = 2k$ kaava (0.69) johtaa lausekkeeseen

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{k! 2^{2k} (r+1)(r+2)\dots(r+k)}. \tag{0.71}$$

Käyttämällä Eulerin gammafunktiota Γ kertoman yleistyksenä tästä saadaan ratkaisufunktio (vaihdetaan indeksi takaisin n:ksi ja valitaan notaation yksinkertaistamiseksi $a_0 = 1/(2^r \Gamma(r+1))$)

$$\begin{aligned} y_1(x) = y(r,x) := J_r(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(r+n+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n+r} \\ &= \Big(\frac{x}{2}\Big)^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(r+n+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n} \end{aligned} \tag{0.72}$$

Jos $r \in \mathbb{N}$, tämä voidaan kirjoittaa

$$y_1(x) = J_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(r+n)!} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n+r}. \tag{0.73}$$

Kaava (0.72) määrittelee *ensimmäisen lajin Besselin funktion kertalukua* r. Muistutetaan, että indisiaaliyhtälön pienempi ratkaisu on $s_2 = -r$. Jos $r \notin \mathbb{N}$, niin $\Gamma(-r+n+1)$ on määritelty kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja kaava (0.72) antaa tällöin myös toisen ratkaisun $y_2 = J_{-r}$ Besselin yhtälölle, ja tämä ei ole lineaarisesti riippuva y_1:stä. Tapauksissa $r \in \mathbb{N}$ toisen ratkaisun löytäminen vaatii lisätarkasteluja, jotka johtavat toisen lajin Besselin funktioihin; tarkastelut sivuutetaan tässä.

Esitys perustuu teokseen Polking, Boggess, Arnold: Differential equations with boundary value problems, 2nd edition, Pearson Prentice Hall, 2006.