

Matematiikan ja tilastotieteen laitos/HY
Differentiaaliyhtälöt II
Lisätehtäviä
Syksy 2010

1. Esitä systeemin $\bar{x}' = A\bar{x}$, missä A on

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 12 & 2 & -6 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} -3 & 4 & 8 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

yleinen ratkaisu.

2. Laske matriisiekspONENTTI e^{tA} , kun A on

$$a) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(Laskettava yleistettyjä ominaisvektoreita käyttäen.)

3. Esitä systeemin $\bar{x}' = A\bar{x}$, missä A on

$$a) \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -8 & -6 & 0 \end{pmatrix},$$

yleinen ratkaisu.

Tehtävissä 4.–6. ratkaise differentiaaliyhtälö potenssisarjamenetelmällä pisteen 0 ympäristössä.

4. $y'' + x^2y = 0$,

5. $y' + 2xy' - y = 0$,

6. $y'' + xy' - y = 0$.

7. Mikä on yhtälöön

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$$

liittyvä indisiaaliyhtälö?

8. Mikä on yhtälöön

$$xy'' + (1 - x)y' - y = 0$$

liittyvä indisiaaliyhtälö? Esitä sen suurempaan nollakohtaan liittyvä palautuskaava ja vastaava Frobeniuksen ratkaisu.

9. Esitä kaksi Frobeniuksen ratkaisua yhtälölle

$$4xy'' + 2y' + y = 0.$$

Ratkaisut.

1. a) Ominaisarvot 2, 1, -1, vastaavat ominaisvektorit $(-1, 2, 1)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, 2, 1)^T$.
 b) Ominaisarvot 0, 2, -1, vastaavat ominaisvektorit $(1, 0, 2)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(-2, 2, -3)^T$.
 c) Ominaisarvot -1, 1, 2, vastaavat ominaisvektorit $(2, 1, 0)^T$, $(1, 1, 0)^T$, $(0, -2, 1)^T$.

$$2.a) e^{-t} \begin{pmatrix} 1 + t^2/2 & -t - t^2/2 & t^2/2 \\ -t & 1 + t & -t \\ -t - t^2/2 & 2t + t^2/2 & 1 - t - t^2/2 \end{pmatrix}, \quad 2.b) e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -t & t & 1 \end{pmatrix}.$$

3. a) $e^{4t}(1 + 2t, -2t + t^2/2, t)^T$, $e^{4t}(0, 1, 0)^T$, $e^{4t}(-4t, 5t - t^2, 1 - 2t)^T$. b) ...

4.

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{4^n n! \cdot 3 \cdot 7 \cdots (4n - 1)},$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4^n n! \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n + 1)}.$$

5.

$$y_1 = 1 + x^2/2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} 3 \cdot 7 \cdots (4n - 5) x^{2n} / (2n)!,$$

$$y_2 = x - x^3/6 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n 5 \cdot 9 \cdots (4n - 3) x^{2n+1} / (2n + 1)!.$$

6.

$$y_1 = 1 + x^2/2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} 3 \cdot 7 \cdots (4n - 5) x^{2n} / (2n)! \quad , \quad y_2 = x.$$

7. $s^2 + 3s + 2 = 0$.

8. $a_n = a_{n-1}/n$, $n \geq 1$.

9.

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n / (2n)! \quad , \quad y_2 = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n / (2n + 1)!.$$