Matematiikan ja tilastotieteen laitos/HY
Differentiaaliyhtälöt 1
Laskuharjoitus 5
Syksy 2010

1. a) Osoita, että funktiopari (u, v), missä $u(x) = x^2$ ja $v(x) = x|x|$, on lineaarisesti riippumaton.
b) Mille parametrien a, $b \in \mathbf{R}$ arvoille pari (e^{ax}, e^{bx}) on lineaarisesti riippumaton?

2. Etsi kertaluvun pudotuksella yhtälön

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) = 0$$

kaikki ratkaisut, kun $f(t) := e^{-t}$ on yksi ratkaisu.

3. Samoin yhtälölle

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0,$$

jolla on ratkaisu $y(x) = x$.

4. Osoita, että jos vakiokertoimisen 2. kertaluvun homogeeniyhtälön

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

karakteristisella yhtälöllä on kompleksiratkaisut $\lambda = \alpha \pm i\beta$, niin funktiot

$$y(x) = C_1e^{\alpha x}\sin(\beta x) + C_2e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

ovat (1):n ratkaisuja.

5. Ratkaise yhtälö

$$y'' + 2y' + y = x.$$

6. Ratkaise a) yhtälö $y'' + 4y = x^2$, b) yhtälö $y'' + 4y = 3e^x$, c) alkuarvotehtävä

$$y'' + 4y = x^2 + 3e^x \quad , \; y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

****

1. a) Show that the pair (u, v) with $u(x) = x^2$ and $v(x) = x|x|$ is linearly independent.
b) For which values of the parameters a, $b \in \mathbf{R}$ is the pair of functions (e^{ax}, e^{bx}) linearly independent?

2. Reducing the order of the equation, find all solutions of

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) = 0$$

given the solution $f(t) := e^{-t}$.

3. The same for the equation

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0,$$

having a solution $y(x) = x$.

4. Assume that the characteristic equation of the 2. order constant coefficient equation

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

has the complex roots $\lambda = \alpha \pm i\beta$. Show that the functions

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\sin(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

are solutions to (1).

5. Solve

$$y'' + 2y' + y = x.$$

6. Solve a) the equation $y'' + 4y = x^2$, b) the equation $y'' + 4y = 3e^x$, c) the initial value problem

$$y'' + 4y = x^2 + 3e^x \quad , \ y(0) = 0, y'(0) = 2.$$