Matematiikan ja tilastotieteen laitos/HY
Differentiaaliyhtälöt 1
Laskuharjoitus 3
Syksy 2010

1. Käytä lineaarisen yhtälön ratkaisumenetelmää seuraavan alkuarvotehtävän ratkaisemiseen:

$$y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = \frac{\cos x}{x^2}\ ,\ y(\pi) = 1.$$

2. Samoin:

$$y' = \frac{y}{3-x}\ ,\ y(-1) = 1.$$

3. Clairaut'n yhtälö on muotoa

$$y = xy' + f(y'), \tag{1}$$

missä $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on annettu, jatkuvasti derivoituva funktio. Osoita, että funktio

$$y(x) = cx + f(c)$$

on yhtälön (1) ratkaisu kaikilla vakioilla $c \in \mathbf{R}$. Sovella tätä yhtälöön

$$xy' - e^{y'} - y = 0.$$

4. Ratkaise yhtälö

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}.$$

5. Olkoot $P : D \to \mathbf{R}$ ja $Q : D \to \mathbf{R}$ jatkuvasti derivoituvia funktioita suorakulmiossa D sekä $P(x,y) \neq 0$ kaikilla $(x,y) \in D$. Oletetaan, että funktio

$$\psi := \frac{1}{P}\Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big)$$

ei riipu muuttujasta x. Osoita, että funktio

$$\mu(x,y) := e^{-\int \psi(y)dy}$$

on yhtälö $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ integroiva tekijä.

6. Etsi yhtälön

$$4e^y \cos y - 2xy'e^y \sin y = 0$$

integroiva tekijä ja ratkaise se. (Vihje. Yhtälöstä näkee, että siinä on eräs "turha" tekijä, joka kannattaa jakaa pois. Sen jälkeen luentojen menetelmä auttaa.)