

1. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt:

$$\text{a) } y''(x) = 3 \sin x \quad , \quad \text{b) } \frac{df(t)}{dt} + t^2 f(t) = 0.$$

2. Esitä normaalimuodossa seuraavat differentiaaliyhtälöt:

$$\text{a) } (1 + x^2)y' - y^2 = 1 \quad , \quad \text{b) } e^{y+y''} = 3x \quad , \quad \text{c) } (y')^2 + yy' - 4x = 0.$$

3. Ratkaise seuraavista differentiaaliyhtälöistä ne, jotka ovat separoituvia:

$$\text{a) } y' + 2y - x^2 = 0, \quad \text{b) } y' + 2x^2y - x^2 = 0, \quad \text{c) } y' = xe^{x^2-y}.$$

4. Ratkaise seuraava alkuarvotehtävä tuntemattomalle funktiolle $y = y(x)$:

$$(1 + x^2)y' - y^2 = 1 \quad , \quad y(0) = 1.$$

5. Osoita, että jos F ja G ovat jollain välillä I määriteltyjä jatkuvia funktioita, jotka eivät ole vakioita ja esim. G :llä on ainakin yksi nollakohta $a \in I$, niin funktiota

$$F(x) + G(y) \quad , \quad x, y \in I,$$

ei voi esittää tulona $p(x)h(y)$, toisin sanoen, yhtälö

$$y' = F(x) + G(y)$$

ei ole separoituva. (Neuvo. Tekemällä vastaoletuksen pystyt johtamaan yhtälön, jossa toisella puolella on $F(x)$, toisella puolella y :n funktio, mikä johtaa ristiriitaan.)

6. Ratkaise seuraava alkuarvotehtävä tuntemattomalle funktiolle $y = y(x)$:

$$1 + 2x - 2yy' = 0 \quad , \quad y(0) = -2.$$