

HARJOITUSSETTI ITSEOPISKELUUN

Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt tai alkuarvot tehtävät. Tarkastele myös ratkaisun pätevyysaluetta. Tehtävistä 16-21 ratkaise ne, jotka ovat eksakteja. Tehtävissä 22-24 käytetään integroivaa tekijää; tehtävän 24 integroiva tekijä on $1/(x^2 + y^2)$. Tehtävissä 36-41, löydä yksittäinen ratkaisu.

1. $y' = xy$.

2. $y' = e^{x-y}$.

3. $y' + y = 2$.

4. $y' + (2/x)y = (\cos x)/x^2$.

5. $y' = xy + y$.

6. $f'(t) - 2f(t)/(t+1) = (t+1)^2$.

7. $y' = x/(y+2)$.

8. $(x^2 + 1)y' + 3xy = 6x$, $y(0) = -1$.

9. $x^2y' = y \ln y - y'$.

10. $f'(t) + f(t) \cos t = \frac{1}{2} \sin(2t)$, $f(0) = 1$.

11. $(2x + 3)y' = y + \sqrt{2x + 3}$, $y(-1) = 0$

12. $y^3y' = x + 2y'$.

13. $y' = y/x$, $y(1) = -2$.

14. $(1 + t)f' + f = \cos t$, $f(-\pi/2) = 0$.

15. $y' = (\sin x)/y$, $y(\pi/2) = 1$.

16. $2x + y + (x - 6y)y' = 0$.

17. $y^2 - y \sin x + y' \cos x = 0$.

18.

$$1 + \frac{y}{x} - \frac{y'y}{x} = 0.$$

19. $y' = (3x^2 + y)/(3y^2 - x)$.

20.

$$\frac{dr(s)}{ds} = \frac{\ln s}{r/s - 2s}.$$

21. $\sin(2t)x'(t) + 2x(t) \cos(2t) - 2t = 0$.

22. $(x^2y^2 - 1)y + (1 + x^2y^2)xy' = 0.$

23. $xy - 1 + (x^2 - xy)y' = 0.$

24. $x^2 + y^2 - x - y'y = 0.$

25. $y'' - y' - 2y = 0$

26. $y'' + 5y' + 6y = 0$

27. $3y'' - 2y' - y = 0$

28. $y'' + 4y' + 5y = 0$

29. $y'' - 2y' + 4y = 0$

30. $y'' - 4y' + 4y = 0$

31. $16y'' + 8y' + y = 0$

32. $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2.$

33. $y'' + 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1.$

34.

$$8\frac{d^2f(t)}{dt^2} + 2\frac{df(t)}{dt} - f(t) = 0 \quad , \quad f(-1) = 1 \quad , \quad f'(-1) = 0.$$

35.

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + 12\frac{df(t)}{dt} + 36f(t) = 0 \quad , \quad f(1) = 0 \quad , \quad f'(1) = -1.$$

36. $y'' + 3y' + 2y = 4e^{-3x}$

37. $y'' + 2y' + 5y = 12e^{-x}$

38. $y''(t) + 4y(t) = \cos(3t)$

39. $y''(t) + 7y'(t) + 6y(t) = 3\sin(2t)$

40. $y'' + 6y' + 8y = 2x - 3$

41.

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + 3\frac{df(t)}{dt} + 4f(t) = t^3.$$

Ratkaisut/ratkaisuvihjeet.

1. $Ce^{x^2/2}$

2. $\ln(e^x + C)$

3. $2 + Ce^{-x}$

4. $(\sin x + C)/x^2$

5. $Ce^{x^2/2+x}$

6. $t(t+1)^2 + C(t+1)^2$
7. $-2 \pm \sqrt{x^2 + C}$
8. $2 - 3(x^2 + 1)^{-3/2}$
9. $e^{Ce^{\arctan x}}$
10. $\sin t - 1 + 2e^{-\sin t}$
11. $\frac{1}{2}\sqrt{2x+3}\ln(2x+3)$
12. Implisiittinen ratkaisu $y^4 - 8y - 2x^2 = C$
13. $-2x$
14. $(1 + \sin t)/(1 + t)$
15. $\sqrt{1 - 2\cos x}$
16. Vektorikentän potentiaali $x^2 + xy - 3y^2$
17. ??
18. ??
19. Implisiittinen ratkaisu $x^3 + xy - y^3 = C$
20. ??
21. Vektorikentän potentiaali $x \sin(2t) - t^2$
22. Implisiittinen ratkaisu $x^2y^2/2 - \ln x + \ln y = C$
23. Implisiittinen ratkaisu $xy - \ln x - y^2/2 = C$
24. Implisiittinen ratkaisu $x - 2^{-1}\ln(x^2 + y^2) = C$.
25. $C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$
26. $C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x}$
27. $C_1e^{-x/3} + C_2e^x$
28. $e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
29. $e^x(C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x))$
30. $C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$
31. $C_1e^{-x/4} + C_2xe^{-x/4}$
32. $e^{2x}/3 - 4e^{-x}/3$.
33. $(2 + 9x)e^{-5x}$
34. $2e^{(t+1)/4}/3 + e^{-(t+1)/2}/3$
35. $(1 - t)e^{-6(t-1)}$

36. $2e^{-3x}$

37. $3e^{-x}$

38. $-\cos(3t)/5$

39. $-21 \cos(2t)/100 + 3 \sin(2t)/100$

40. $x/4 - 9/16$

41. $t^3/4 - 9t^2/16 + 15t/32 - 9/128$