

**Autonomiset systeemit**  
Harjoitus 8, syksy 2010

Tutki tehtävissä 1-3 tasapainotilan  $\mathbf{0}$  stabiilisuutta Lyapunovin funktion tai antifunktion avulla. Yksinkertaiset yritteet toimivat. Mihin näistä tehtävistä sopisi myös lause 3.3?

1.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y - xy^2 \\ \dot{y} &= -2x - y - x^2y\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= e^y - 1 \\ \dot{y} &= x^3\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + y^4 \\ \dot{y} &= -y^3 + y^4\end{aligned}$$

Ohje. Riittää tutkia vain jotain origon ympäristöä.

4. Etsi yritteellä  $U(x, y) = axy^2 + bx^3$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ , Lyapunovin antifunktio parille

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= -2xy\end{aligned}$$

ja osoita siten tämän parin tasapainotila  $\mathbf{0}$  epästabiiliksi. Missä alueessa antifunktioehdot toteutuvat?

5. Etsi skalaariyhtälön

$$\frac{d^3x}{dt^3} + (\ddot{x})^2 + (\dot{x})^2 + x^2 - 1 = 0,$$

ts. sitä vastaavan 1. kl. systeemin, kriittiset pisteet ja tutki niiden stabiilisuutta Poincarén ja Perronin teoreeman (lause 3.3) avulla. Toisaalta, löytyisikö käyttökelpoinen Lyapunovin funktio tai antifunktio helposti?