Autonomiset systeemit
Harjoitus 5, syksy 2010

1. Osoita, että lineaarinen pari

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\omega^2 x + f(t),$$

jossa $\omega > 0$ on vakio ja funktio $f(t)$ on jatkuva, on stabiili. Onko se asymptoottisesti stabiili?

Taustaa matriisinormeista: Olkoon $\|*\|$ jokin $\mathbf{R}^n$:n (tai $\mathbf{C}^n$:n) normi. Se määrittelee matriiseille $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ (tai $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$) nk. operaattorinormin

$$\|A\| = \sup_{x\neq \mathbf{0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Itse asiassa suppi on tässä maksimi, joten normi on todella äärellinen. Suora seuraus määritelmästä:

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

Kun pohja-avaruudessa käytetään euklidista normia, saadaan tavallisin operaattorinormi $\| * \|_2$.
Olkoon $A = (a_{ij})$. Nk. Frobenius-normi on $\|A\|_{Fr}^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$. Se ei ole operaattorinormi.

2. Olkoot A ja B $n \times n$-neliömatriiseja. Osoita että operaattorinormille pätee $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

3. Osoita että $\|A\|_2 \leq \|A\|_{Fr}$.
Ohje. Kirjoita A:n rivivektorit $a_{i*} = (a_{i1}, \cdots, a_{in})$, ja esitä $\|Ax\|_2^2$ niiden avulla. Pistetulo ja Schwarz.

4. Todista epäyhtälö (2.14).

5. Osoita että lineaarisen yhtälön

$$\ddot{u} + \big(a + c(1+t^2)^{-1}\big)u = g(t)$$

kaikki ratkaisut ovat stabiileja, jos parametrille a pätee $a > 0$. Lisäksi $c \in \mathbf{R}$ ja $g(t)$ on jatkuva.