

Autonomiset systeemit
Harjoitus 2, syksy 2010

Huom. Numeroinnit (*,*) viittaavat luentoihin, niin jatkossakin.

1. Tarkastellaan autonomista paria

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + y \\ \dot{y} &= -x - y^3.\end{aligned}$$

Olkoon $z = (x, y) \in \mathbf{R}^2$. Osoita, että

- (a) sen rata eteenpäin, $\gamma^+(z)$, on rajoitettu joukko,
- (b) ratkaisu $t \cdot z$ on olemassa kaikilla $t \geq 0$.

2. Olkoon $x \in D$ tavallinen, so. ei kriittinen piste. Osoita, että rata $\gamma(x)$ ei tällöin sisällä kriittisiä pisteitä.

3. Olkoon $x \in D$ periodinen piste, so. löytyy $t_0 > 0$, jolla $t_0 \cdot x = x$, mutta $f(x) \neq \mathbf{0}$. Osoita, että tällöin on olemassa pienin luku $T > 0$, jolla $T \cdot x = x$, siis periodi.

4. Olkoon $x \in D$ periodinen piste tehtävän 3 esittämässä mielessä. Todista (1.12).
Ohje. Kirjoita vaikka $y(t + kT) = x(t)$, $0 \leq t \leq T$, $k \in \mathbf{Z}$.

5. Olkoon $x(t)$ autonomisen systeemin (1.1) ratkaisu, jolla $x_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \in D$ on olemassa. Osoita, että x_0 on tällöin kriittinen piste.

Huom. Vastaava pätee myös raja-arvolle $x_0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) \in D$.