Analyysi I
Kurssikoe 1, 21.10.2010
Ratkaisuehdotuksia ja niiden pisteytys (1 & 2: Aapo Tevanlinna, 3 & 4: Mika Koskenoja)

1. Itseisarvolemman (IAL) perusteella

$$|2x-4|<6 \overset{\text{IAL}}{\iff} -6<2x-4<6 \iff -1<2x+1<11 \quad (+2\text{p})$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned}|x+2|<2 &\overset{\text{IAL}}{\iff} -2<x+2<2 \iff -4<2x+4<4\\ &\iff -7<2x+1<1, \quad (+2\text{p})\end{aligned}$$

joten

$$-1<2x+1<1 \overset{\text{IAL}}{\iff} |2x+1|<1. \quad (+2\text{p}) \qquad \square$$

Pisteytyksen idea: Oletuksista johdettu tulos $-1<x<0$ tai $-1<2x+1<1$ antaa +4p ja sen käyttö väitteen $|2x+1|<1$ todistamiseen antaa +2p.

2.

$$\begin{aligned}\frac{n(n^2+1)}{(n^2+2)(n^2+3)} &= \frac{n^4\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^4\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)}{\left(1+2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)\left(1+3\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)} \quad (+2\text{p})\\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0\cdot(1+0\cdot 0)}{(1+2\cdot 0\cdot 0)(1+3\cdot 0\cdot 0)} = \frac{0}{2} = 0. \quad (+4\text{p})\end{aligned}$$

Yleiset virheet:

- Supistus termillä n^3 aiheuttaa nimittäjään osan, joka ei suppene. Muuten lauseen 4.7 käyttö OK: –2p.
- Välivaiheiden puute (esim. $\frac{1}{n^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ perustelu tai sievennysvirhe: –1p.
- Paha sekavuus ratkaisussa: –1p.
- Täydet +6p saa myös käyttäen raja-arvon määritelmää/kuristuslausetta sopivalla yläarviolla.

3. Tapa 1. Olkoon $M \in \mathbb{R}$ (+1p). Valitaan sellainen $n_M \in \mathbb{N}$, että $n_M > 2M+1$ (+1p). Tällöin

$$\begin{aligned}n-\sqrt{n} &= \frac{(n-\sqrt{n})(n+\sqrt{n})}{n+\sqrt{n}} \overset{(+1\text{p})}{=} \frac{n^2-n}{n+\sqrt{n}} \geqslant \frac{n(n-1)}{2n} = \frac{n-1}{2} \quad (+1\text{p})\\ &> \frac{n_M-1}{2} \overset{(+1\text{p})}{>} \frac{2M+1-1}{2} = \frac{2M}{2} = M, \quad (+1\text{p})\end{aligned}$$

kun $n > n_M$. Näin ollen $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n}) = \infty$. $\square$

Tapa 2. Olkoon $M \in \mathbb{R}$ (+1p). Valitaan sellainen $n_M \in \mathbb{N}$, että $n_M > (M+1)^2$ (+1p). Tällöin

$$\begin{aligned}n-\sqrt{n} &\overset{(+1\text{p})}{=} \sqrt{n}\left(\sqrt{n}-1\right) \overset{(+1\text{p})}{\geqslant} \sqrt{n}-1 > \sqrt{n_M}-1\\ &\overset{(+1\text{p})}{>} \sqrt{(M+1)^2}-1 = M+1-1 = M, \quad (+1\text{p})\end{aligned}$$

kun $n > n_M$. Näin ollen $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n}) = \infty$. $\square$

4. Tapa 1. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$ (+1p). Tällöin

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-0\right| &\overset{(+1p)}{=} \left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right| = \left|\frac{f(x)}{x-1}-\frac{f(1)}{x-1}\right| \overset{\Delta\text{-ey}}{\leqslant} \left|\frac{f(x)}{x-1}\right| + \left|\frac{f(1)}{x-1}\right| \quad (+1p)\\ &= \frac{|f(x)|}{|x-1|}+\frac{|f(1)|}{|x-1|} \leqslant \frac{7|x-1|^2}{|x-1|}+\frac{7|1-1|^2}{|x-1|} \quad (+1p)\\ &= 7|x-1| < 7\delta \leqslant 7\frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon, \quad (+1p)\end{aligned}$$

kun $0 < |x-1| < \delta$ (+1p). Näin ollen $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$. □

Tapa 2 (lyhyempi). Todetaan ensin, että koska $|f(1)| \leqslant 7|1-1|^2 = 0$, niin $f(1) = 0$ (+1p). Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$ (+1p). Tällöin

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-0\right| &\overset{(+1p)}{=} \left|\frac{f(x)-0}{x-1}\right| = \left|\frac{f(x)}{x-1}\right| = \frac{|f(x)|}{|x-1|} \leqslant \frac{7|x-1|^2}{|x-1|} \quad (+1p)\\ &= 7|x-1| < 7\delta \leqslant 7\frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon, \quad (+1p)\end{aligned}$$

kun $0 < |x-1| < \delta$ (+1p). Näin ollen $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$. □