

## PURTAVAA ENSIMMÄISTÄ KURSSIKOETTA VARTEN

Tässä harjoittelumateriaalia ensimmäistä kurssikoetta varten. Koealueena on siis karkeasti sanottuna kurssin alku - funktion raja-arvon määritelmän käyttö. Tämä tehtäväsarja yrittää antaa tarkempaa kuvaa tärkeistä asioista.

Kannattaa myös kerrata harjoitusten ja ohjausten tehtävät.

1. Kirjoita lukujonon raja-arvon määritelmä. Selitä se omin sanoin (ja kuvin).
2. Oletetaan, että  $a < b$  ja  $0 \leq x \leq 1$ . Osoita, että  $a \leq ax + b(1 - x) \leq b$ .
3. Todista, että  $x^3 < x$  aina kun  $0 < x < 1$ .
4. Todista, että  $x^2 < y^2$  aina kun  $0 < x < y$ .
5. Oletetaan, että  $9 < x < 9 + 5^{-999}$ . Osoita, että  $\sqrt{x} - 3 < 5^{-1000}$ .
6. Mitkä luvut toteuttavat molemmat epäyhtälöt  $|x+1| < 2$  ja  $|x-2| < 3$ ?
7. Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön  $|3x - 2| < 1$ ?
8. Oletetaan, että  $|x - e| < 10^{-1000}$  ja  $|y - \pi| < 10^{-1000}$ . Osoita, että  $|xy - e\pi| < 10^{-999}$ .
9. Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella väite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{n + 3} = 3$$

todeksi.

10. Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella väite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{n + 3} = 2$$

epätodeksi.

11. Oletetaan, että lukujono  $x_n$  toteuttaa ehdon  $|x_n - a| < 1$  kaikilla  $n$ . Osoita, että on olemassa luku  $M$ , jolle  $-M < x_n < M$  pitää paikkansa kaikilla  $n$ .

12. Oletetaan, että jonot  $(x_n)$  ja  $(y_n)$  suppenevat. Määritellään  $z_n = \max(x_n, y_n)$ . Osoita, että jono  $(z_n)$  suppenee.
13. Selvitä kurssin lauseiden avulla lukujonon raja-arvo, kun  $x_n$  on

$$\frac{6 + n^3}{(n + 1)(n^2 - 2)}$$

14. Oletetaan, että lukujonoilla  $(x_n)$  ja  $(y_n)$  on seuraavat ominaisuudet: kaikilla  $n$  pätee  $|x_n| < 2$  ja  $y_n \rightarrow 0$  kun  $x_n \rightarrow \infty$ . Todista, että jono  $(x_n y_n)$  suppenee.
15. Monisteen sivun 25 alaosan esimerkki.
16. Oletetaan, että  $x_1 > 0$  ja  $x_{n+1}/x_n = 1 + 1/n$  kaikilla  $n$ . Osoita, että jono  $(x_n)$  hajaantuu. Vihje: kirjoita palautuskaavan oikea puoli murto-lausekkeen muotoon.
17. Oletetaan, että lukujono  $(x_n)$  on määritelty ehdoilla  $x_1 = 1$  ja  $x_{n+1}/x_n = 1 + 1/3n^2$ . Osoita, että jono suppenee. Voit esimerkiksi edetä seuraavasti.
- (1) Osoita, että jono on aidosti nouseva.
  - (2) Osoita, että  $x_n \leq 2 - 1/n$  kaikilla  $n$ .
  - (3) Tee johtopäätökset.

18. Oletetaan, että  $x_n \geq 0$  kaikilla  $n$  ja että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Osoita, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

19. Oletetaan, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Osoita, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}.$$

20. Oletetaan, että jono  $(x_n)$  on laskeva, jono  $(y_n)$  on nouseva, ja että  $|x_n - y_n| \rightarrow 0$  kun  $n \rightarrow \infty$ . Osoita, että kaikilla  $n$  pätee  $y_n \leq x_n$ . Mitä tiedät jonojen suppenemisesta tai hajaantumisesta?

21. Tiedetään, että  $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$  kun  $n \rightarrow \infty$ . Entä miten käy lausekkeen  $(1 + \frac{1}{3n})^n$ ?

22. Osoita, että

$$\frac{n^2 + 1}{n + 1} \rightarrow \infty,$$

kun  $n \rightarrow \infty$ .

23. Osoita, että

$$\frac{n}{3^{2n}} \rightarrow 0,$$

kun  $n \rightarrow \infty$ .

24. Oletetaan, että  $A = ]1, 2[ \cup ]3, 4[$ . (Merkintä tarkoittaa kahden joukon yhdistettä: niitä pisteitä, jotka kuuluvat ainakin toiseen joukoista.) Mikä on  $\sup A$ ? Mikä on  $\inf A$ ?

25. Oletetaan, että  $A = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Mitä ovat  $\sup A$  ja  $\inf A$ ? Miksi ne ovat olemassa?

26. Oletetaan, että  $A$  ja  $B$  ovat epätyhjiä ylhäältä rajoitettuja reaalilukujoukkoja ja että  $a = \sup A$  ja  $b = \sup B$ . Osoita, että  $\sup\{x + y \mid x \in A, y \in B\} = a + b$ .

27. (Jatkoa edelliseen) Oletetaan lisäksi, että joukkojen  $A$  ja  $B$  alkiot ovat positiivisia. Osoita, että  $\sup\{xy \mid x \in A, y \in B\} = ab$ .

28. Selvitä raja-arvon määritelmän perusteella

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Miksi voit olettaa, että  $x \neq 2$ ?

29. Selvitä  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$  ja perustele väitteesi raja-arvon määritelmän avulla.

30. Osoita raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1}{x - 1} = 2.$$