

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I

Övning 9

22.11-26.11.2010

I dessa övningsuppgifter får du använda kända egenskaper av funktioner som används i skolan, såsom exempelvis sinusfunktionens kontinuitet och deriveringsregel.

1. Definiera $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ med ekvationen $f(x) = x|x|$. För vilka x existerar derivatan $f'(x)$? För vilka x existerar den andra derivatan $f''(x)$ eller den tredje derivatan $f'''(x)$?
2. Derivera
 - (a) $\sin^3 x^4$;
 - (b) $\sin^2(\sin^3 x^4)$;
 - (c) $\sqrt{\sin^2(\sin^3 x^4) + 1}$.
3. Betrakta funktionen $f :]0, 64[\rightarrow]0, 12[$ för vilken $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ för varje $x \in]0, 64[$. Varför har f en strängt växande (kontinuerlig) och deriverbar invers funktion $g :]0, 12[\rightarrow]0, 64[$? Bestäm $g'(2)$.
4. Anta att $f'(1) = 3$. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h}.$$

Tips: utöka det uttryck som undersöks till ett uttryck som innehåller differenskvoterna

$$\frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \quad \text{och} \quad \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}.$$

5. Vi undersöker funktionen $f(x) = x^5$. Tolka ekvationen

$$(a+h)^5 = a^5 + 5a^4h + 10a^3h^2 + 10a^2h^3 + 5ah^4 + h^5$$

med hjälp av karakteriseringssatsen. Vilka delar utgör $f(a)$, $f'(a)h$ samt $h\varepsilon(h)$? Kan man finna derivatan till funktionen i punkten $x = a$ direkt från ovanstående ekvation?

6. Anta att $p > 0$. Visa att ekvationen $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ har högst två olika reella rötter. Tips: Beteckna vänstra sidan av ekvationen med $= f(x)$. Visa först med hjälp av den andra derivatan att f' är strängt växande. Tillämpa därefter Rolles sats mellan på varandra följande rötter till f .