INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Övning 8
15.11-19.11.2010

1. Visa att funktionen
$$f(x) = x + |x|$$
är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$.

2. Definiera funktionen $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ genom villkoret $f(x) = -x^{-123} + x + x^{456}$. Visa med hjälp av Bolzanos sats att det finns ett $x \in]1, 2[$ för vilket gäller att $f(x) = 1001$.

3. Vi betraktar funktionen $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ från föregående uppgift. Visa att $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0+$ och att $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$. Visa på basen av dessa observationer att det finns ett sådant tal $x \in \mathbb{R}$ att $f(x) = 666^{666}$ och ett sådant tal $t \in \mathbb{R}$ att $f(t) = -666^{666}$.

4. Låt f vara funktionen från uppgift 2. Definiera
$$g(x) = \frac{1}{f(x)^2 + 1}, \quad x > 0.$$
Visa att det finns ett största tal bland de värden som funktionen g antar.

5. Betrakta funktionen $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ som definieras av uttrycket i uppgift 2. Visa att f har en invers funktion som är strängt växande och kontinuerlig.

6. Anta att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion. Anta dessutom att $f(1) < f(3)$ och att $f(2) > f(4)$. Visa att det finns två olika reella tal x och y för vilka $f(x) = f(y)$. (Denna uppgift utgör ett specialfall av ett resultat som säger att varje kontinuerlig injektion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ måste endera vara strängt växande eller strängt avtagande.)