

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I

Övning 7

8.11-12.11.2010

EXTRAPOÄNG!

För hemräkneövningarna: 4 poäng om du har räknat åtminstone 50 uppgifter, 3 poäng om du räknat 40-49 uppgifter, 2 poäng om du räknat 30-39 uppgifter samt 1 poäng om du räknat 20-29 av höstens uppgifter.

För handledningarna: 2 poäng om du från och med 8.11 deltar i handledningarna under 5-6 veckor och 1 poäng om du deltar i handledningarna under 3-4 veckor.

1. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 + x^2 + x}{x^2 + 7}.$$

med hjälp av sats 5.4 i kompendiet.

2. Visa utgående från definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{7x^3 + 1} = \frac{1}{7}.$$

3. Visa utgående från definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{5 + x}{3 - x} = -\infty.$$

4. Anta att funktionen  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  för alla  $n = 0, 1, 2, \dots$  uppfyller villkoren  $f(x) = x - 2n$  när  $2n \leq x \leq 2n + 1$  och  $f(x) = 2n + 2 - x$  när  $2n + 1 < x < 2n + 2$ . Rita funktionens graf. Existerar gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)?$$

5. Anta att  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  är växande och att  $a < c < b$ . Visa att

$$\lim_{x \rightarrow c-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c+} f(x).$$

6. Anta att  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  satisfierar villkoren  $f(0) = 1$  och  $f'(0) = 2$ . Visa att det finns ett sådant  $\delta > 0$  att för varje  $x$  gäller: om  $0 < x < \delta$  så är  $(2 - \frac{1}{5})x < f(x) - 1 < (2 + \frac{1}{5})x$ .

(Det lönar sig att tillämpa definitionen av gränsvärdet av en funktion på differenskvoten  $E(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ . Om  $|x|$  är tillräckligt litet (och  $x \neq 0$ ) så är  $|E(x) - 2| < \frac{1}{5}$  ... Det lönar sig att rita en bild!)