INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Övning 6 (korrigerad)
1.11-5.11.2010

I dessa övningar fortsätter vi arbetet med gränsvärdet av funktioner. Kontinuitet och deriverbarhet för funktioner är med från början som exempel på gränsvärden.

1. Visa med hjälp av definitionen för gränsvärdet av en funktion att påståendet
$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{4}{7}$$
gäller.

2. Visa med hjälp av definitionen för gränsvärdet av en funktion att påståendet
$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{2x+1}=1$$
inte gäller.

3. Definiera funktionen $f:]1,4[\to\mathbb{R}$ genom villkoret
$$f(x)=\frac{x+1}{2x+1}.$$
Visa med hjälp av definitionerna av gränsvärdet och derivatan för funktioner att funktionen f är deriverbar i punkten $x=3$ och att $f'(3)=-\frac{1}{49}$.

4. Visa med hjälp av definitionerna av gränsvärdet och derivatan för funktioner att funktionen $f(x)=\sqrt{x}$ är deriverbar i punkten $x=16$ och att $f'(16)=1/8$.

5. Anta att $h>0$ och att funktionen f är definierad för alla $x\in]x_0-h,x_0+h[$, samt att $\lim_{x\to x_0}f(x)=b$, där $b\neq 0$. Visa att det finns ett sådant $\delta>0$ att för varje $x\neq x_0$ gäller: om $|x-x_0|<\delta$ så är $\frac{1}{2}|b|<|f(x)|<\frac{3}{2}|b|$. Tips: Det kan löna sig att betrakta fallen $b<0$ och $b>0$ separat.

6. Anta att funktionen g satisfierar olikheten $|g(x)|<7$ för varje $x\in]-1,1[$. Visa att funktionen $f(x)=x^2g(x)$ är deriverbar i punkten $x=0$ och att $f'(0)=0$. Undersök djärvt avståndet mellan differenskvoten till f och talet 0.

   (Observera att vi kan exempelvis ha $g(x)=0$ då x är ett rationellt tal och $g(x)=1$ då x är ett irrationellt tal. En funktion kan alltså vara deriverbar i en punkt och diskontinuerlig i alla andra punkter.)