INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Övning 5 (korrigerad version)
11.10-15.10.2010

I dessa övningsuppgifter fortsätter vi att arbeta med talföljder samt börjar att studera gränsvärdet av funktioner. Notera att kontinuitet och differentierbarhet är viktiga exempel på existensen av vissa gränsvärden.

1. Visa att
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{3n+4} = \infty.$$

2. Bestäm
$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{7n})^n.$$
utgående från definitionen av talet e.

   I uppgiften får man använda följande information: om $x_n \to a$ då $n \to \infty$, så gäller att $\sqrt[7]{x_n} \to \sqrt[7]{a}$.

3. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en funktion att $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$. Kan resultatet tolkas som ett faktum om kontinuitet för någon funktion? Vilken funktion och i vilken punkt?

4. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en funktion att
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}.$$
Kan resultatet tolkas som ett faktum om derivatan för en viss funktion? Vilken funktion och i vilken punkt?

5. Visa att
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty.$$
Här kan du använda t.ex. följande olikheter (bevisa dem)
$$\frac{2^{2^p}}{2^p} \geq \frac{(1+p)^2}{2^p} \quad \text{och} \quad \frac{2^{2^p+1}}{2^p+1} \geq 2\frac{(1+p)^2}{2^p+1}.$$

6. Anta att $x_n \to \infty$ och $y_n \to a \in \mathbb{R}$ då $n \to \infty$.

   (a) Anta att $a > 0$. Visa att $x_n y_n \to \infty$ då $n \to \infty$. Tips: $y_n > \frac{a}{2}$ då n är tillräckligt stort. Resultatet presenteras ofta som regeln $a\infty = \infty$ då $a > 0$

   (b) Anta att $a < 0$. Visa att $x_n y_n \to -\infty$ då $n \to \infty$. Resultatet presenteras ofta som regeln $a\infty = -\infty$ då $a < 0$

   (c) Existerar regeln $0\infty = \ldots$?