

# INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I

Övning 4

4.10-8.10.2010

För räkneövningarna får man 4 poäng om man löst minst 50 uppgifter; 3 poäng om man löst under 50 men minst 40 uppgifter; 2 poäng om man löst under 40 men minst 30 uppgifter; och 1 poäng om man löst under 30 men minst 20 av höstens uppgifter.

Det ges även extrapoäng för aktivt deltagande i handledningarna under 2. perioden. Noggrannare information senare.

Repetera vid behov induktionsbevis och rekursiva talföljder.

1. Bestäm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)(n^3-2n)}{(n^2+1)(n^2+2)}.$$

2. Visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+n} - 2n) = \frac{1}{4}.$$

3. Anta att talföljden  $(x_n)$  konvergerar. Visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} x_n = 0.$$

Tips: observera att en talföljd som konvergerar alltid är begränsad.

4. Anta att talföljden  $(x_n)$  är avtagande och talföljden  $(y_n)$  är växande, samt att för varje  $n$  gäller  $y_n \leq x_n$ . Visa att båda följderna konvergerar och att  $\lim y_n \leq \lim x_n$ .

5. Visa att det reella talet  $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ och } x^2 < 7\}$  existerar och att  $a^2 = 7$ .

6. Modifiera exempel från föreläsningarna och visa att talföljden  $(x_n)$  har gränsvärdet  $\sqrt{7}$  om  $x_1 = 3$  och för varje  $n$  gäller

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{7}{x_n} \right).$$

Observera att vi i uppgiften ska visa att följderna i fråga konvergerar. Extra frågor (behöver inte lösas för att kryssa för uppgiften): (a) Kan du förklara varför talföljden förefaller att konvergera mycket snabbt? (b) Kan du ge exempel på ett index  $n$  för vilket  $|x_n - \sqrt{7}| < 10^{-100}$ ?