INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Övning 10
29.11-3.12.2010

I dessa övningsuppgifter får man använda kända egenskaper av kända funktioner från skolkursen som exempelvis kontinuiteten och deriveringsregler för cosinusfunktionen. En del av uppgifterna kan påminna om skoluppgifter: kom dock ihåg att motivera dina lösningar med hjälp av satser från kursen Analys I.

1. Anta att funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[0,1]$ och deriverbar i intervallet $]0,1[$. Anta att $f(0) = 3$ samt att för varje $x \in]0,1[$ gäller att $0 < f'(x) < x$. Vad vet man på basen av detta om värdet $f(1)$? Tips: man har nytta av hjälpfunktionen $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - f(x)$; det lönar sig att visa att för varje $x \in]0,1[$ gäller $g'(x) > 0$.

2. Visa med hjälp av medelvärdessatsen att för alla x gäller att
$$|\cos x - 1| \le |x|.$$
(Kom ihåg att $\cos 0 = 1$.)

3. Anta att $a_1, \ldots, a_n$ är reella tal. För vilka x antar den sk. kvadratiska summan $(x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$ sitt minsta möjliga värde?

4. Undersök funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, där
$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^4 + 1}}$$
för alla $x \in \mathbb{R}$. Visa att f inte är deriverbar i punkten $x = 0$.

5. Anta att $h > 0$ och att funktionen $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $]x_0 - h, x_0 + h[$ och deriverbar i intervallen $]x_0 - h, x_0[$ och $]x_0, x_0 + h[$. Anta dessutom att $\lim_{x \to x_0 -} f'(x) = \lim_{x \to x_0 +} f'(x) = A \in \mathbb{R}$. Visa att f är deriverbar i punkten x_0 och att $f'(x_0) = A$. Tips: tillämpa medelvärdessatsen på differenskvoten.

6. Anta att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[a,b]$ och deriverbar i intervallet $]a,b[$ samt att $C > 0$.

   (a) Anta att för alla $x \in]a,b[$ gäller att $|f'(x)| \le C$. Visa att för alla $x, t \in [a,b]$ gäller att $|f(x) - f(t)| \le C|x - t|$.

   (b) Anta att för alla $x, t \in [a,b]$ gäller att $|f(x) - f(t)| \le C|x - t|$. Är f nödvändigtvis deriverbar i intervallet $]a,b[$? Gäller det att $f'(x) \le C$ i intervallet $]a,b[$ om vi vet att f är deriverbar i detta intervall?

   (c) Anta att för alla $x, t \in [a,b]$ gäller att
$$|f(x) - f(t)| \le C|x - t| \sqrt[42]{|x - t|} \; (= C|x - t|^{\frac{43}{42}}).$$
   Visa att f är en konstant funktion. (Vad är väsentligt i exponenten $\frac{43}{42}$?)