

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I

Övning 1

13.9.-17.9. 2010

Välkomna till kursen *Analys I*.

I dessa uppgifter övar vi att exakt använda räkneregler och olikheter för reella tal. Man bör sträva till att motivera lösningarna med tillräcklig noggrannhet så att också bordsgrannen m.fl. förmår acceptera det som påstås.

Uppgifterna 4, 5 och 6 bildar en helhet, där vi egentligen undersöker hur uttrycket x^2 närmar sig värdet 9 då x närmar sig 3 från höger. (Observera dock att vi inte ännu har en definition för detta!)

1. Det inversa talet till talet x är det entydiga tal y för vilken $xy = 1$. Varför har talet 0 inget inverst tal; dvs. varför är division med noll inte tillåtet?

2. Gäller följande påståenden?

(a) $x^2 < x$ alltid då $0 < x < 1$?

(b) $x < x^2$ alltid då $1 < x$?

(c) $x^2 < y^2$ alltid då $x < y$?

(d) $x^2 < y^2$ alltid då $0 < x < y$?

Sträva till att motivera ditt svar med hjälp av de egenskaper för olikheter som behandlats på föreläsningarna (eller i kompendiet).

3. Anta att $x > 0$. Visa att

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

4. Sök ett sådant reellt tal $K > 0$, för vilket följande gäller för alla reella tal x : om $3 < x < 4$, så är $x^2 - 9 < K(x - 3)$.

5. Anta att $3 < x < 3 + 7^{-7777}$. Visa att då är $9 < x^2 < 9 + 7^{-7776}$.

6. Sök ett sådant reellt tal $h > 0$, för vilket följande gäller för alla reella tal x : om $3 < x < 3 + h$, så är $9 < x^2 < 9 + 7^{-1000000}$. Observera att det lönar sig att endast betrakta tal $h < 1$. Då följer nämligen från villkoret $3 < x < 3 + h$ att $3 < x < 4$, varmed man kan använda observationerna från de två föregående uppgifterna.