

Tilastollinen päättely, syksy 2009 - kevät 2010

Harjoitus 9, viikko 6

1. Kemiantehtaassa kone annostelee erästä kemikaalia kanistereihin. Oletetaan, että kerralla annostellun kemikaalin määrä (litroina) noudattaa normaalijakaumaa. Pyrkimyksenä on säätää kone siten, että keskimääräinen annos μ on 10 ja keskihajonta σ korkeintaan 0.2. Tutkittiin 20 kanisteria ja havaittiin, että niissä oli kemikaalia keskimäärin $\bar{y} = 9.86$ (litraa), keskihajonnan ollessa $s = 0.25$. Testaa kaksisuuntaisella t -testillä ja yksisuuntaisella χ^2 -testillä, onko kone säädön tarpeessa. Käytä 5 %:n merkitsevyystasoa. [Monisteen harjoitustehtävä 5.3]
2. Olkoot Y_1 ja Y_2 kaksi riippumatonta havaintoa Poisson-jakaumasta $P(\mu)$. Halutaan testata hypoteesia $H_0: \mu = 2$ vastaan $H_1: \mu < 2$. Testisuureena on $T = Y_1 + Y_2 \sim P(2\mu)$.
 - a) Millaiset testisuureen arvot t todistavat mielestäsi H_0 :aa vastaan ja H_1 :n puolesta: pienet vai suuret? Miksi?
 - b) Mitkä testisuureen t arvot johtavat H_0 :n hylkäämiseen ja H_1 :n hyväksymiseen merkitsevyystasolla 0.1? Mitkä havaintoparit (y_1, y_2) kuuluvat vastaavaan kriittiseen alueeseen? [Monisteen harjoitustehtävä 5.5]
3. Mallina on $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu, 1) \perp\!\!\!\perp$. Testataan hypoteesia $H_0: \mu = 0$ hypoteesia $H_1: \mu \neq 0$ vastaan käyttämällä kaksisuuntaista z -testiä merkitsevyystasolla 0.05 (ks. luentojen kohta 5.4.1).
 - a) Muodosta tämän testin voimafunktio ja hahmottele karkeasti sen kuvaajaa. Vertaa sitä yksisuuntaisen ($H_1: \mu > 0$) z -testin voimaan (luentojen esimerkki 5.5.3). Miten tulkitset sen, että kaksisuuntaisen testin voima on pienempi kuin yksisuuntaisen joukossa $\mu > 0$?
 - b) Kuinka suuri on havaintojen lukumäärän n oltava, jotta voima pisteissä $\mu = \pm 0.5$ olisi ≥ 0.8 (eli hyväksymisvirheen riski ko. pisteissä ≤ 0.2)?
4. Diskreetin satunnaismuuttujan Y jakauma riippuu parametrasta θ , jolla on kaksi mahdollista arvoa: 0 ja 1. Vastaavat Y :n pistetodennäköisyydet on esitetty taulukossa alla.

y	1	2	3	4	5	6	7
$f_Y(y; 0)$.01	.01	.01	.01	.01	.01	.94
$f_Y(y; 1)$.06	.05	.04	.03	.02	.01	.79

Halutaan testata $H_0: \theta = 0$ vastaan $H_1: \theta = 1$. Laske suhteet $f_Y(y; 1)/f_Y(y; 0)$ ja määritä Neyman–Pearson-apulauseeseen vetoamalla voimakkain testi (esim. ilmoittamalla kriittinen alue), kun merkitsevyystasoksi valitaan 0.04. Kuinka suuri on hyväksymisvirheen todennäköisyys? [Monisteen harjoitustehtävä 5.9]

5. Toistokoemallin $K \sim \text{Bin}(n, \theta)$ parametrina on $\theta \in (0, 1)$. Tarkastellaan hypoteeseja $H_0: \theta = \theta_0$ ja $H_1: \theta = \theta_1$, jossa $\theta_0 < \theta_1$. Osoita uskottavuusosamäärää tutkimalla eli Neyman–Pearson-apulauseen avulla, että voimakkain testi saadaan testisuuresta k . Järkeile myös, että kyseessä on tasaisesti voimakkain testi yhdistetylle vastahypoteesille $H_1: \theta > \theta_0$.

[*Vihje.* Muokkaa uskottavuusosamäärää niin, että saat näkyviin suhteet $\theta_0/(1 - \theta_0)$ ja $\theta_1/(1 - \theta_1)$. Monisteen harjoitustehtävä 5.10]