Tilastollinen päättely, syksy 2009 - kevät 2010

Harjoitus 8, viikko 5

1. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim Tas(0, \theta) \perp\!\!\!\perp$. Osoita, että suurin havainto $Y_{(n)}$ on parametrin θ tyhjentävä tunnusluku. [*Ohje*: Faktorointikriteeri. Monisteen harjoitustehtävä 4.3]

2. Olkoon $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\theta})$ tilastollinen malli ja $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sen parametrin SU-estimaatti. Oletetaan, että $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{Y})$ on tyhjentävä tunnusluku. Perustele faktorointikriteerin avulla, että $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ riippuu aineistosta $\boldsymbol{y}$ vain tunnusluvun $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{y})$ välityksellä. [Monisteen harjoitustehtävä 4.5]

3. Tilastollinen malli muodostuu kahdesta riippumattomasta havainnosta Y_1 ja Y_2, joille $Y_1 \sim N(\mu_1, 1)$ ja $Y_2 \sim N(\mu_2, 1)$. Parametri on (μ_1, μ_2). Ilmoita, mitkä seuraavista hypoteeseista ovat yksinkertaisia ja mitkä yhdistettyjä:

   a) $\mu_1 = 1$
   b) Y_1 ja Y_2 ovat samoin jakautuneita
   c) kummankin mediaani on 1
   d) $P\{Y_1 > Y_2\} > \frac{1}{2}$

   Esitä myös graafisesti vastaavat joukot (μ_1, μ_2)-koordinaatistossa.

   [Huom.: Jatkuvan satunnaismuuttujan Y jakauman mediaani on reaaliluku m, joka toteuttaa ehdot $P\{Y \leq m\} = P\{Y \geq m\} = \frac{1}{2}$. Monisteen harjoitustehtävä 5.1]

4. Kolikon harhattomuutta tutkitaan heittämällä sitä sata kertaa ja kirjaamalla ylös kruunujen lukumäärä.

   a) Formuloi asetelmaa kuvaava malli ja nollahypoteesi. Mikä on luonnollinen testisuure? Millaiset testisuureen arvot puhuvat nollahypoteesia vastaan?
   b) Tuloksena on 55 kruunua. Laske vastaava p-arvo ja pohdi voidaanko kolikkoa pitää harhattomana. (Käytä normaaliapproksimaatiota binomijakauman todennäköisyyksien laskentaan.)
   c) Muuttuuko johtopäätöksesi, jos heittoja onkin tuhat ja saadaan 550 kruunua?