Tilastollinen päättely, syksy 2009 - kevät 2010

Harjoitus 7, viikko 4

1. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim P(\mu) \perp\!\!\!\perp$. Mitä normaalijakaumaa su-estimaattori $\hat{\mu} = \overline{Y}$ approksimatiivisesti noudattaa, kun n on suuri? [Monisteen harjoitustehtävä 3.13]

2. Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = \theta y^{\theta - 1}, \quad 0 < y < 1,$$

   jossa $\theta > 0$. Johda parametrin θ su-estimaattori ja selvitä mitä normaalijakaumaa se approksimatiivisesti noudattaa, kun n on suuri.

3. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp$. Parametrin (μ, σ^2) su-estimaattori $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$, jossa

$$\hat{\mu} = \bar{Y} \quad \text{ja} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2.$$

   Mitkä ovat sen kaksiulotteisen normaalijakauman parametrit (odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi), jota $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ approksimatiivisesti noudattaa, kun n on suuri? [Monisteen harjoitustehtävä 3.15(b)]

4. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim Exp(\lambda) \perp\!\!\!\perp$. Osoita, että otoskeskiarvo $\bar{Y}$, tai yhtä hyvin summa $\sum_{i=1}^{n} Y_i$, on parametrin λ tyhjentävä tunnusluku. [*Ohje*: Faktorointikriteeri. Monisteen harjoitustehtävä 4.1]

5. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim Exp(\lambda) \perp\!\!\!\perp$. Edellisen tehtävän perusteella $T = Y_1 + \cdots + Y_n$ on mallin parametrin λ tyhjentävä tunnusluku. Ilmoita T:n tiheysfunktio f_T ja laske siitä Fisherin informaatio $i_T(\lambda)$. Vertaa sitä koko aineistoa vastaavasta mallista $f_{\boldsymbol{Y}}$ laskettuun Fisherin informaatioon $i_{\boldsymbol{Y}}(\lambda)$. Mitä huomaat?

   [*Vihje*: $T \sim G(n, \lambda)$. Monisteen harjoitustehtävä 4.7]