

## Tilastollinen päättely, syksy 2009 - kevät 2010

Harjoitus 5 (syksyn viimeinen harjoitus)

1. Oletetaan, että  $T$  on funktion  $g(\boldsymbol{\theta})$  estimaattori. Johda keskineliövirheelle hajotelma

$$E_{\boldsymbol{\theta}}[(T - g(\boldsymbol{\theta}))^2] = \text{var}_{\boldsymbol{\theta}}(T) + b(\boldsymbol{\theta})^2,$$

jossa  $b(\boldsymbol{\theta})$  on estimaattorin harha. [Monisteen harjoitustehtävä 3.1]

2. Mallissa  $Y_1, \dots, Y_n \sim \text{Tas}(0, \theta) \perp\!\!\!\perp$  on su-estimaattoriksi saatu  $\hat{\theta} = \max(Y_1, \dots, Y_n)$  (ks. luentojen kohta 2.2.8).

- a) Muodosta  $\hat{\theta}$ :n kertymäfunktio  $F$  lähtien havainnosta

$$P\{\hat{\theta} \leq y\} = P\{Y_1 \leq y\} \cdots P\{Y_n \leq y\}$$

ja derivoi siitä tiheysfunktio  $f = F'$ .

- b) Laske  $\hat{\theta}$ :n odotusarvo ja totea, että  $\hat{\theta}$  on harhainen mutta asymptoottisesti harhaton.
- c) Laske  $\hat{\theta}$ :n varianssi ja keskineliövirhe  $E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$  ja vertaa jälkimmäistä momenttimenetelmän antaman harhattoman estimaattorin  $\tilde{\theta} = 2\bar{Y}$  (lentojen kohta 3.3.3) varianssiin. Kumpi estimaattori on parempi?
- d) Olisiko  $\check{\theta} = [(n+1)/n]\hat{\theta}$  hyvä estimaattori? [Monisteen harjoitustehtävä 3.10]

3. Tarkastellaan toistokoemallia  $Y_1, \dots, Y_n \sim B(\theta) \perp\!\!\!\perp$ . Varmista, että su-estimaattori  $\hat{\theta} = (Y_1 + \dots + Y_n)/n$  on harhaton ja laske sen varianssi. Onko  $\hat{\theta}$  täystehokas? [Vihje: Miten  $K = Y_1 + \dots + Y_n$  olikaan jakautunut?]

4. Tarkastellaan gammajakaumamallia  $Y_1, \dots, Y_n \sim G(\alpha, 1/\beta) \perp\!\!\!\perp$ , jossa  $\alpha, \beta > 0$ .

- a) Parametrina on  $(\alpha, \beta)$ . Totea, että uskottavuusyhtälöt voidaan saattaa muotoon

$$\begin{cases} \log \alpha - \psi(\alpha) = \log \bar{y} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log y_i, \\ \beta = \bar{y}/\alpha, \end{cases}$$

jossa  $\psi(\alpha) = \Gamma'(\alpha)/\Gamma(\alpha)$ . Niitä ei voi ratkaista suljetussa muodossa.

- b) Luku  $\alpha$  on tunnettu luku ja parametrina on vain  $\beta$ . Mikä on  $\beta$ :n su-estimaatti? Onko se harhaton? Entä täystehokas? [Huom.: Monisteen liite, monisteen harjoitustehtävä 2.8]

5. Johda edellisen tehtävän a-kohdan mallissa momenttimenetelmän antamien estimaattoreiden  $\tilde{\alpha}$  ja  $\tilde{\beta}$  lausekkeet

$$\tilde{\alpha} = \frac{\bar{Y}^2}{\tilde{\sigma}^2}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\tilde{\sigma}^2}{\bar{Y}},$$

jossa  $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ . [Monisteen harjoitustehtävä 3.11]

**Huom.:** Viimeinen luento ennen joulutaukoa on perjantaina 11.12.