

Tilastollinen päättely, syksy 2009 - kevät 2010

Harjoitus 3

1. Oletetaan, että Y_1, \dots, Y_n ovat riippumattomia ja noudattavat kukin geometrista jakaumaa, jonka parametrina on $\theta \in (0, 1)$. Muodosta vastaava tilastollinen malli ja log-uskottavuusfunktio sekä määritä parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaatti. Määritä lisäksi suurimman uskottavuuden estimaatit odotusarvolle $E(Y_i)$ ja varianssille $var(Y_i)$.

[*Muista.* Geometrinen jakauma ilmoittaa toistokokeessa (onnistumistodennäköisyys = θ) sen kokeen järjestysnumeron, jolloin ensimmäinen onnistuminen tapahtuu, joten $P_\theta\{Y = y\} = \theta(1 - \theta)^{y-1}$, $y = 1, 2, \dots$, ks. harjoituksen 1 tehtävä 1(f).]

2. Olkoot $Y_1, \dots, Y_n \sim Exp(\lambda) \perp\!\!\!\perp$ (ks. edellisen harjoituksen tehtävä 2). Laske havaittu informaatio $j(\hat{\lambda}; \mathbf{y})$, Fisherin informaatio $i(\lambda)$ ja odotusarvo $E[l'(\lambda; \mathbf{Y})^2]$. [Monisteen harjoitustehtävä 2.11]
3. Tarkastellaan mallia, jossa havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat Y_1, \dots, Y_n ovat riippumattomat. Mallin parametri on yksiulotteinen θ . Totea, että mallin havaittu informaatio ja Fisherin informaatio ovat

$$j(\theta; \mathbf{y}) = j_1(\theta; y_1) + \dots + j_n(\theta; y_n) \quad \text{ja} \quad i(\theta) = i_1(\theta) + \dots + i_n(\theta),$$

jossa $j_k(\theta; y_k)$ on pelkästään yhteen havaintoon y_k perustuva havaittu informaatio ja $i_k(\theta) = E[j_k(\theta; Y_k)]$ on vastaava Fisherin informaatio. Miten tulkitset tämän tuloksen? [Monisteen harjoitustehtävä 2.13]

4. Olkoot $Y_1, \dots, Y_n \perp\!\!\!\perp$ ja $Y_i \sim N(\beta x_i, \sigma_0^2)$, jossa x_1, \dots, x_n ovat tunnettuja lukuja ja $\sigma_0^2 > 0$ on tunnettu. Johda parametrin β suurimman uskottavuuden estimaatti ja mallin havaittu informaatio $j(\beta; \mathbf{y})$. Vertaa havaitun informaation arvoja tapauksissa a) $x_i \geq c > 0$ ja b) $x_i = 1/i$, kun $n \rightarrow \infty$.
5. Laatikossa on arpaliput, jotka on numeroitu luvuilla $1, 2, \dots, \nu$. Lippujen lukumäärä ν on tuntematon positiivinen kokonaisluku. Laatikosta poimitaan umpimähkään ja palauttaen viisi lippua. Ne ovat 21, 2, 13, 30 ja 11. Muotoile tätä koeasetelmaa kuvaava tilastollinen malli. Ilmoita sitten havaintoja vastaava uskottavuusfunktio ja perustele, että $\hat{\nu} = 30$.

[*Vihje:* Kyseessä on diskreetti versio monisteen kohdassa 2.2.8 esitetystä esimerkistä. Monisteen harjoitustehtävä 2.7]