Tilastollinen päättely, syksy 2009 - kevät 2010

Harjoitus 2

1. Olkoon $y_1, \ldots, y_n$ ja a mielivaltaisia reaalilukuja. Tarkista, että

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 + n(\overline{y} - a)^2,$$

kun $\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i/n$. Mitä tekemistä tällä on Pythagoraan lauseen kanssa? (Tulosta käytettiin monisteen esimerkissä 2.1.4.)

2. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n \sim Exp(\lambda) \perp\!\!\!\perp$. Kirjoita vastaavan tilastollisen mallin lauseke (ytf). Muodosta sitten aineistoa $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ vastaava uskottavuus- ja log-uskottavuusfunktio sekä määritä huolellisesti perustellen parametrin λ suurimman uskottavuuden estimaatti. Hahmottele log-uskottavuusfunktion kuvaajaa.

3. (a) Olkoon $f(y; \theta) = \theta/y^{\theta+1}$, kun $y > 1$ (ja $= 0$ muulloin). Varmista, että f on erään jatkuvan jakauman tiheysfunktio, kun θ on positiivinen parametri.
   (b) Oletetaan, että satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat em. jakaumaa. Muodosta syntyvän tilastollisen mallin ytf, ilmoita sen log-uskottavuusfunktio ja etsi parametrin suurimman uskottavuuden estimaatti, kun aineisto on $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

4. Olkoon mallina $Y_1, \ldots, Y_n \sim Tas(\theta, \theta + 1) \perp\!\!\!\perp$. Johda aineistoa $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ vastaava uskottavuusfunktio ja totea, että se saa suurimman arvonsa jokaisessa välin $\big(y_{(n)} - 1, y_{(1)}\big)$ pisteessä, kun merkitään $y_{(1)} = \min(y_1, \ldots, y_n)$ ja $y_{(n)} = \max(y_1, \ldots, y_n)$. Siten suurimman uskottavuuden estimaatti $\hat{\theta}(\boldsymbol{y})$ ei ole yksikäsitteinen (todennäköisyydellä yksi).

5. Vuonna 1898 ilmestyneessä kuuluisassa tilastossa oli raportoitu hevosenpotkuun kuolleiden miesten vuosittaiset lukumäärät neljässätoista Preussin armeijan yksikössä kahdenkymmenen vuoden ajalta, yhteensä siis 280 havaintoa. Yhteenveto tuloksista on alla.

Kuolleita	0	1	2	3	4	≥ 5
Havaintoja	144	91	32	11	2	0

Oletetaan, että kuolleiden lukumäärä yhtenä vuonna yhdessä yksikössä noudattaa Poisson-jakaumaa ja on riippumaton sekä muiden yksiköiden että muiden vuosien lukumääristä. Olkoon μ kyseisen Poisson-jakauman odotusarvo. Muodosta aineistoa vastaavan log-uskottavuusfunktion lauseke ja etsi μ:n suurimman uskottavuuden estimaatti. Mikä on suurimman uskottavuuden estimaatti todennäköisyydelle, että yhtään miestä ei kuole tietyssä yksikössä vuoden aikana?