Tilastollinen päättely, syksy 2009 - kevät 2010

Harjoitus 1

1. Kertausta todennäköisyyslaskennasta. Ilmoita satunnaismuuttujan Y jakauman nimi ja pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio seuraavissa tapauksissa:

   (a) $Y = X_1 + \cdots + X_n$, kun $X_1, \cdots, X_n \sim B(\theta) \quad \perp\!\!\!\perp$ (otos Bernoulli-jakaumasta)

   (b) $Y = U + V$, kun $U \sim N(0,1), V \sim N(0,4)$ ja $U \perp\!\!\!\perp V$.

   (c) $Y = U^2$, kun $U \sim N(0,1)$.

   (d) $Y = aX + b$, kun $X \sim Tas(0,1)$ (välin (0, 1) tasajakauma) ja $a > 0, b \in \mathbb{R}$.

   (e) $Y = X_1 + \cdots + X_n$, kun $X_1, \cdots, X_n \sim EXP(\lambda) \perp\!\!\!\perp$.

   (f) Y on toistokokeessa (jossa onnistumistodennäköisyys $0 < \theta < 1$) sen toiston järjestysnumero, jolla ensimmäinen onnistuminen tapahtuu; esim. heitettäessä lanttia, jossa kruunun todennäköisyys $= \theta$, ensimmäinen kruunu tulee Y:nnellä heitolla.

   Ilmoita myös Y:n odotusarvo ja varianssi kussakin tapauksessa.

   [Perusteluja ei tarvitse esittää. Käytä tarvittaessa todennäköisyyslaskennan materiaalia ja taulukkokirjoja apuna.]

2. Erään sähkölaitteen eliniän (päivinä) oletetaan noudattavan eksponenttijakaumaa. Olkoon μ keskimääräinen elinikä (eliniän odotusarvo). Poimitaan n laitetta yksinkertaisella satunnaisotannalla ja mitataan niiden eliniät $y_1, \ldots, y_n$, jolloin vastaavat satunnaismuuttujat ovat $Y_1, \ldots, Y_n \sim EXP(1/\mu)$. Muodosta syntyvän tilastollisen mallin eli satunnaisvektorin $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ ytf:n lauseke. Ilmoita myös mallin uskottavuusfunktio. Pane merkille, että se riippuu aineistosta vain yhden luvun kautta.

3. Tilanne on sama kuin edellisessä tehtävässä. Nyt ei kuitenkaan ole mahdollista mitata kunkin laitteen elinikää erikseen, vaan käytetään halvempaa koejärjestelyä, jossa n laitetta pannaan yhtä aikaa käyntiin ja kuukauden (30 päivää) kuluttua tullaan tarkastamaan, mitkä niistä ovat ehjiä ja mitkä rikki. Muodosta tätä asetelmaa kuvaava tilastollinen malli parametrille μ.

   [Vihje. Ajattele koeasetelmaa n-kertaisena toistokokeena, jossa onnistuminen merkitsee, että laite on ehjä ja epäonnistuminen, että se on rikki. Mikä on onnistumistodennäköisyys μ:n avulla lausuttuna.]

4. Eräs leijona viettää yönsä jossakin kolmesta tilasta: se on koko yön joko hyvin aktiivinen ($\theta = 1$), kohtalaisen aktiivinen ($\theta = 2$) tai unelias ($\theta = 3$). Leijona syö yön aikana Y ihmistä. Satunnaismuuttujan Y pistetodennäköisyydet riippuvat leijonan tilasta ja käyvät ilmi oheisesta taulukosta.

y	0	1	2	3	4
$f_Y(y;1)$	.00	.05	.05	.80	.10
$f_Y(y;2)$	.05	.05	.80	.10	.00
$f_Y(y;3)$	.90	.08	.02	.00	.00

Eräänä aamuna havaittiin, että yön aikana leijona oli syönyt (i) $y = 1$, (ii) $y = 3$ ihmistä. Esitä graafisesti vastaavat uskottavuusfunktiot. Millaisia päätelmiä tekisit leijonan tilasta kyseisenä yönä? Kuinka luotettavina pitäisit päätelmiäsi?