7. Stokastiset differentiaaliyhtälöt

Kävimme läpi edellisessä kappaleessa kaksi reuna-arvotehtävää, jotka voidaan ratkaista stokastisen integroinnin avulla käyttäen hyväksi Brownin liikettä. Havaitsimme myös, että Brownin liike tuntui vastaavan jollakin tavalla differentiaalioperaattoria $\frac{1}{2}\triangle$.

Yritämme hieman yleistää tätä, jotta saamme paremman kuvan stokastisista differentiaaliyhtälöistä. Merkitsemme seuraavassa kirjaimella L operaattoria, joka liittää funktioon f sen ensimmäisen ja toisen kertaluvun derivaatoista rakennetun funktion. Formaalisti merkitsemme siis

$$L\colon f \mapsto \Big(x \mapsto \tfrac{1}{2}\sum_{j,k} A^{jk}(x) f_{jk}(x) + \sum_{j} b^{j}(x) f_{j}(x)\Big).$$

Asiaa selventää hieman, jos valitsemme $A^{jk}(x) = [\, j = k\,]$ ja $b^j(x) = 0$, jolloin $L = \frac{1}{2}\triangle$. Tarkastelemme seuraavassa edellisen kappaleen esimerkkejä hieman muistuttavaa *parabolista* tehtävää

$$\begin{cases} \partial_t u = Lu, & \text{joukossa } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) & \text{jokaisella } x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{7.1}$$

ja oletamme, että u *on jatkuva koko joukossa* $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$. Funktion u ensimmäinen koordinaatti on *aikakoordinaatti* ja loput ovat *paikkakoordinaatteja.* Derivaatta ∂_t derivoi siis ajan suhteen ja operaattori L derivoi paikkakoordinaattien suhteen.

Tilanne on hieman toisenlainen kuin edellisissä esimerkeissä, sillä jos $L = \frac{1}{2}\triangle$, niin tehtävä on

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{1}{2}\triangle u, & \text{joukossa } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) & \text{jokaisella } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{7.2}$$

Tämä on kuitenkin oleellisesti yksinkertaisempi tehtävä, kuten huomaamme pian. Jos vasen puoli olisi 0, niin tietäisimme, että kannattaisi lähteä tarkastelemaan stokastista prosessia $X_t = u(B_t)$. Mutta nyt dimensiot eivät täsmää, joten koitammekin tarkastella prosessia

$$X_t = u(f(t), B_t).$$

Jos u olisi hyvin sileä ja funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olisi myös sileä, niin voisimme käyttää Itōn kaavaa ja siis

$$\mathrm{d}X_t = \partial_t u(f(t), B_t)\,\mathrm{d}f(t) + \mathrm{d}M_t + \tfrac{1}{2}\triangle u(f(t), B_t)\,\mathrm{d}t.$$

Jos siis $\mathrm{d}f(t) = -\,\mathrm{d}t$ eli $f(t) = s - t$, niin jos $\partial_t u - \frac{1}{2}\triangle u = 0$, niin X_t olisi lokaali martingaali välillä $[0, s)$ ja voisimme jatkaa lähes samaan tyyliin kuin ennenkin.

Käyttämällä optionaalisen pysäyttämisen lausetta, voisimme päätellä, että

$$\mathbf{E}_x X_0 = u(s,x) = \mathbf{E}_x X_s = \mathbf{E}_x u(0,B_s) = \mathbf{E}_x f(B_s)$$

Siispä havaitsemme, että tehtävä (7.2) liittyy läheisesti prosessiin $Z_t := u(s-t, B_t)$ ja sitä kautta suoraan Brownin liikkeeseen B.

Yleisemmin voimme kysyä, liittykö alkuarvotehtävään (7.1) jokin vastaava stokastinen prosessi X, joka tekisi prosessista $Z_t := u(s-t, B_t)$ lokaalin martingaalin. Teemmekin yritteen,

$$\mathrm{d}X_t := \sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t + c(X_t)\,\mathrm{d}t, \quad X_0 = x \tag{7.3}$$

joillakin matriisilla $\sigma\colon z \mapsto (\sigma^{ij}(z))$ ja vektorilla $c\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ja *oletamme*, että u on alkuarvotehtävän (7.1) ratkaisu.

Voimme siten soveltaa Itōn kaavaa prosessiin $Z_t = u(s-t, X_t)$ ja saamme, että

$$\mathrm{d}Z_t = -\partial_t u(s-t,X_t)\,\mathrm{d}t + \sum_j u_j(s-t,X_t)\,\mathrm{d}X_t^j + \tfrac{1}{2}\sum_{j,k} u_{jk}(s-t,X_t)\,\mathrm{d}\langle X^j, X^k\rangle_t.$$

Jos $\mathrm{d}\langle X^j, X^k\rangle_t = A^{jk}(X_t)\,\mathrm{d}t$ ja jos $c(X_t) = b(X_t)$, niin

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Z_t &= \Big(-\partial_t u(s-t,X_t) + \sum_j u_j(s-t,X_t) b^j(X_t) \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\sum_{j,k} A^{jk}(X_t) u_{jk}(s-t,X_t)\Big)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_t \\ &= Lu(s-t,X_t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_t = \mathrm{d}M_t\end{aligned}$$

Olemme siten jo löytäneet yritteemme vektorifunktion c. Matriisi σ on vielä kateissa, mutta voimme laskea suoraan, mitä on $\mathrm{d}\langle X^j, X^k\rangle_t$? Koska $X_t = N_t + A_t$, niin $\langle X^j, X^k\rangle_t = \langle N^j, N^k\rangle_t$, kun siis

$$\mathrm{d}N_t^j = \sum_k \sigma^{jk}(X_t)\,\mathrm{d}B_t^j$$

ja siten

$$\mathrm{d}\langle X^j, X^k\rangle_t = \sum_{l,m} \sigma^{jm}(X_t)\sigma^{kl}(X_t)\,\mathrm{d}\langle B^m, B^l\rangle_t.$$

Tiedämme jo, että $\mathrm{d}\langle B^m, B^l\rangle_t = [\, m = l\,]\,\mathrm{d}t$, joten

$$\mathrm{d}\langle X^j, X^k\rangle_t = \sum_l \sigma^{jl}(X_t)(\sigma^\top)^{lk}(X_t)\,\mathrm{d}t = (\sigma\sigma^\top)^{jk}(X_t)\,\mathrm{d}t,$$

missä matriisifunktio $\sigma^\top$ vastaa matriisifunktion σ *transpoosia*. Haluamme siten löytää matriisifunktion σ, jolle $\sigma\sigma^\top = A$, koska tällöin Z_t on lokaali martingaali välillä $[0,s)$.

Olemmekin jo lähes päätelleet, että

7.4. **Lemma.** *Oletetaan, että X on stokastisen differentiaaliyhtälön* (7.3) *ratkaisu. Oletetaan edelleen, että u on alkuarvotehtävän* (7.1) *rajoitettu ja kahdesti derivoituva ratkaisu sekä oletetaan, että kaavan* (7.3) *funktio $c = b$ ja $\sigma\sigma^\top = A$. Tällöin*

$$u(x,t) = \mathbf{E}_x\, f(X_t)\,.$$

Todistus. Tiedämme oletusten ja edeltävän avulla, että $Z_t = u(s-t, X_t)$ on jatkuva lokaali martingaali välillä $[0,s)$. Koska u on rajoitettu, on Z tasaisesti integroituva, ja siten sillä on raja-arvo

$$Z_s = \lim_{t\uparrow s} Z_t = u(0, X_s) = f(X_s).$$

Koska $\mathbf{E}_x\, Z_s = \mathbf{E}_x\, Z_0 = u(s,x)$, niin väite seuraa. □

Tämä tulos on sekä yksikäsitteisyystulos alkuarvotehtävälle (7.1) mutta myös stokastiselle differentiaaliyhtälölle (7.3).

7.5. **Lemma.** *Oletetaan, että alkuarvotehtävällä* (7.1) *on rajoitettu ratkaisu u jokaisella jatkuvalla f. Jos X^x ja $\widetilde{X}^x$ ovat kaksi stokastisen differentiaaliyhtälön* (7.3) *ratkaisua, niin tällöin $X_t^x \sim \widetilde{X}_t^x$ jokaisella t ja jokaisella x.*

Todistus. Edellisen lemman avulla tiedämme, että

$$u(t,x) = \mathbf{E}\, f(X_t^x) = \mathbf{E}\, f(\widetilde{X}_t^x)$$

jokaisella x ja jokaisella t sekä jokaisella f. Merkitään $\xi := X_t^x$ ja $\widetilde{\xi} := \widetilde{X}_t^x$. Voimme nyt approksimoida kuutiota $(-\infty, a^1] \times \cdots \times (-\infty, a^d] \subset \mathbb{R}^d$ jatkuvilla funktioilla ja päättelemme siten, että

$$\mathbf{P}\left(\xi^j \le a^j \text{ kun } j = 1, \ldots, d\right) = \mathbf{P}\left(\widetilde{\xi}^j \le a^j \text{ kun } j = 1, \ldots, d\right)$$

□

7.6. *Huomautus.* Funktion

$$u(t,x) = \mathbf{E}\, f(X_t^x) = \mathbf{E}_x\, f(X_t)$$

avulla voimme määritellä kuvauksen P_t, joka liittää funktion f kullakin ajahetkellä $t \ge 0$ funktion $x \mapsto u(t,x)$. Jos prosessi X on aikastationaarinen Markovin prosessi, niin

$$\begin{aligned} P_t f(x) &= \mathbf{E}_x\, \mathbf{E}\, \left(f(X_t) \,|\, \mathscr{F}_s\right) = \mathbf{E}_x\, \mathbf{E}_{X(s)}\, f(X_{t-s}) = \mathbf{E}_x\, P_{t-s} f(X_s) \\ &= P_s P_{t-s} f(X_s) \end{aligned}$$

Tämän ominaisuuden takia kuvauksia $(P_t)_{t\geq 0}$ nimitetään *Markovin prosessin X siirtymäpuoliryhmäksi.* Tämän puoliryhmän analyyttinen tarkastelu mahdollistaa aikastationaaristen Markovin prosessien tutkimisen funktionaalianalyyttisin keinoin. Itse asiassa, voisimme osoittaa, että puoliryhmän tunteminen määrää prosessin tietyssä mielessä yksikäsitteisesti eli voisimme parantaa edellisen lemman tulosta huomattavasti (jos vain tietäisimme, että prosessi on Markovin prosessi).

Edelleen voimme todeta käsitteistöstä sen, että kuvausta L sanotaan yleensä Markovin prosessin X *infinitesimaaliseksi virittäjäksi*, sillä se kertoo oleellisesti sen, kuinka prosessi X käyttäytyy infinitesimaalisten lyhyellä ajalla.

7.1. **Martingaaliongelma ja heikot ratkaisut.** Olemme jo varsin lähellä stokastisten differentiaaliyhtälöiden yleisen teorian alkeita. Lähtökohtamme oli stokastinen differentiaaliyhtälö

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}s \tag{7.7}$$

ja totesimme, että jos alkuarvotehtävä (7.1) on rajoitettu ja mukavasti ratkeava, niin *jos X_t on yhtälön* (7.7) *ratkaisu*, niin $\mathbf{E}_x\, f(X_t) = u(t,x)$ on alkuarvotehtävän (7.1) ratkaisu.

Vielä emme tiedä, onko stokastista prosessia X oikeasti edes olemassa! Voimme myös kysyä, että mitä tarkoitamme olemassololla. Joka tapauksessa *ainakin* σ ja b on annettava etukäteen, jotta voimme puhua olemassaolosta.

Eräs tapa ajatella on se, että jos myös alkujakauma X_0 sekä Brownin liike B on annettu, niin haluamme *rakentaa* prosessin X siten, että se on adaptoitu filtraation

$$\mathscr{F}_t^{X_0} = \widehat{\mathscr{H}_t} \vee \{\, \{X_0 \in A\} :\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)\,\}$$

suhteen. Jotta Brownin liike B olisi Brownin liike tämänkin filtraation suhteen on syytä olettaa, että X_0 on riippumaton Brownin liikkeestä. Yleensä lähtöjakauma on yksittäinen piste, jolloin vakiosatunnaismuuttuja ei lisää mitään tietoa Brownin liikkeen historiaan eikä siten muuta Brownin liikettä.

Toinen hieman oudommalta kuullostava ajatus on se, että voimme samanaikaisesti *konstruoida myös Brownin liikkeen* $\widetilde{B}$ eli konstruoimme parin $(X, \widetilde{B})$ ja vaadimme, että näin määritellyt prosessit toteuttavat yhdessä yhtälön (7.7).

7.8. **Määritelmä.** Jos X_0 ja Brownin liike B on annettu, niin jos löydämme stokastisen prosessin X, joka on adaptoitu filtraation $(\mathscr{F}_t^{X_0})$ suhteen ja joka toteuttaa yhdessä annetun X_0 sekä annetun Brownin liikkeen B kanssa yhtälön (7.7), niin sanomme, että X on stokastisen differentiaaliyhtälön (7.7) *vahva ratkaisu.*

Muotoilemme tämän avulla Itōn olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen stokastisten differentiaaliyhtälöiden *vahvojen ratkaisujen olemassaololle.* Tämä on hyvin lähellä tavallisten differentiaaliyhtälöiden teorian perusolemassaolo- ja yksikäsitteisyystuloksen kanssa ja se vaatii siten tietynlaista sileyttä kertoimilta b ja σ.

7.9. **Lause.** *Oletaan, että funktiot b ja σ toteuttavat jollakin aikavälillä $[0, s]$ ehdot: hitaan kasvun oletuksen*

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$$

sekä paikan suhteen Lipschitzin ehdot

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|.$$

Jos X_0 on riippumaton Brownin liikkeestä B ja sillä on äärellinen toinen momentti, niin tällöin yhtälöllä (7.7) *on poluttain yksikäsitteinen vahva ratkaisu X.*

Todistus. Todistus perustuu samaan ajatukseen kuin tavallisten differentiaaliyhtälöiden teorian vastaava tulos. Määrittelemme induktiivisesti jonon

$$X_t^{(n+1)} = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s^n) \, \mathrm{d}B_s + \int_0^t b(X_s^n) \, \mathrm{d}s$$

kun $n \in \mathbb{N}$ ja asetamme $X_t^0 = X_0$. Näytämme sitten, että

i) kun n kasvaa äärettömiin, niin $X^n \to \widetilde{X}$.

ii) tämä nähdään asettamalla

$$\Delta_n(t) := \mathbf{E} \, |X_t^n - X_t^{n-1}|^2$$

niin voimme kasvu- sekä Lipschitzin ehtojen avulla arvioida, että

$$\Delta_{n+1}(t) \leq C \int_0^t \Delta_n(u) \, \mathrm{d}u$$

iii) koska suoraan laskemalla $\Delta_1(t) \leq C(1 + t)t$, niin voimme päätellä, että

$$\sup_{s \leq t} \Delta_n(s) \leq \frac{r^{n+1}}{n + 1)!}$$

jollakin $r > 0$ ja tästä voimmekin päätellä, että raja-arvo $\widetilde{X}$ on olemassa.

iv) Määrittelemällä

$$X_t := X_0 + \int_0^t \sigma(\widetilde{X}_s) \, \mathrm{d}B_s + \int_0^t b(\widetilde{X}_s) \, \mathrm{d}s$$

löydämme ainakin yhden ratkaisun.

v) Jos Y on jokin toinen ratkaisu, niin voimme päätellä, että jos asetamme

$$\Delta(t) := \mathbf{E} \sup_{s\le t} |X_s - Y_s|^2 ,$$

niin

$$\Delta(t) \le C\mathbf{E} \sup_{s\le t} |M_s(X,Y)|^2 + C\mathbf{E} \sup_{s\le t} \left|\int_0^s A_u(X,Y)\,\mathrm{d}u\right|^2$$

vi) martingaaliosaa $M(X,Y)$ voimme aluksi arvioida Doobin maksimaaliepäyhtälöllä, sen jälkeen Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöllä ja havaitsemme, että

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{s\le t} |M_s(X,Y)|^2 &\le 4t \int_0^t \mathbf{E}\,|\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)|^2 \,\mathrm{d}s \\ &\le 4tD^2 \int_0^t \mathbf{E}\,|X_s - Y_s|^2 \,\mathrm{d}s \le 4tD^2 \int_0^t \Delta(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

vii) vastaavasti lokaalisti rajoitetusti heilahteleva osa voidaan arvioida Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöllä ja sitten Lipschitzin ehdolla ja saamme vastaavasti

$$\mathbf{E} \sup_{s\le t} \left|\int_0^s A_u(X,Y)\,\mathrm{d}u\right|^2 \le tD^2 \int_0^t \Delta(s)\,\mathrm{d}s$$

viii) kaiken kaikkiaan

$$\Delta(t) \le C' \int_0^t \Delta(s)\,\mathrm{d}s$$

ja Gromwallin epäyhtälön nojalla $\Delta(t) = 0$. Siispä $X_s = Y_s$ kaikilla $s \le t$.

□

Jos oletamme vähemmän kertoimilta b ja σ tai paremminkin suoraan kertoimilta b ja a, niin vahvaa ratkaisua ei yleensä aina löydy. Tyydymmekin yleensä heikompaan ratkaisuun.

7.10. **Määritelmä.** Oletetaan, että jokin filtraatio $(\mathscr{F}_t)$ on annettu. Oletamme, myös että on annettu jokin $\mathscr{F}_0$-mitallinen satunnaismuuttuja X_0. Jos löydämme stokastisen prosessin X *sekä jonkin Brownin liikkeen* B, jotka ovat adaptoituja filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen ja jotka toteuttavat yhdessä annetun X_0 kanssa yhtälön (7.7), niin sanomme, että X tai tarkemmin pari (X,B) on stokastisen differentiaaliyhtälön (7.7) *heikko ratkaisu.*

7.11. *Huomautus.* Heikon ja vahvan ratkaisun määritelmien ero se, että vahvassa ratkaisussa Brownin liike on etukäteen annettu mutta heikossa ratkaisussa rakennamme $(\mathscr{F}_t)$-adaptoidun Brownin liikkeen saman aikaisesti. Huomaammekin siis, että jos ratkaisu on vahva, niin se on myös heikko, sillä voimme pitää annettua Brownin liikettä myös jälkikäteen konstruoituna.

7.12. *Huomautus.* Se, mitä Brownin liikkeen rakentaminen edellisessä tarkoittaa, niin haluamme siis löytää jonkin Gaussisen prosessin B, joka on $(\mathscr{F}_t)$-adaptoitu, jonka lisäykset $B(t+h) - B(t)$ ovat samoin jakautuneita kuin tavallisella Brownin liikkeellä *ja mikä tärkeintä riippumattomia* σ-algebrasta $\mathscr{F}_t$ jokaisella $t, h > 0$. Tässä mielessä filtraatio $(\mathscr{F}_t)$ on eräänlainen historia tälle Brownin liikkeelle, mutta pientä ennustamista voidaan mahdollisesti siis sallia.

Mitä etua tällaisista heikoista ratkaisuista oikein on? Eräs etu on se, että on paljon tilanteita, milloin ainoastaan heikko ratkaisu on olemassa. Ja lisäksi alkuarvo- sekä reuna-arvotehtävätarkasteluihin heikot ratkaisut riittävät varsin mainiosti, sillä niissä emme tarvinneet Brownin liikkeen olevan jokin tietty vaan mikä tahansa Brownin liike kävi.

Jotta nämä erot tulisivat hieman selvemmiksi, niin määrittelemme kaksi ratkaisun yksikäsitteisyysominaisuutta.

7.13. **Määritelmä.** Oletetaan, että on annettu jokin $(\mathscr{F}_t)$ filtraatio todennäköisyyavaruudella $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Oletetaan, että (X, B) ja (X', B') on kaksi yhtälön (7.7) heikkoa ratkaisua tämän filtraation suhteen. Sanomme, että yhtälön (7.7) ratkaisu on *poluttain yksikäsitteinen*, jos ehdoista $X_0' = X_0$ sekä $B = B'$ seuraa, että $X = X'$.

7.14. *Huomautus.* Määritelmän merkinnällä $B = B'$ (ja vastaavasti $X = X'$) tarkoitimme että melkein varmasti polut $t \mapsto B(t, \omega)$ sekä $t \mapsto B'(t, \omega)$ ovat samat.

7.15. *Huomautus.* Olemassaolo- ja Yksikäsitteisyyslauseessa saatu yksikäsitteisyys oli poluttaista yksikäsitteisyyttä, sillä saadut ratkaisut olivat vahvoja, joten $B = B'$ ja $X_0' = X_0$ toteutuivat automaattisesti. Koska näimme, että jos X ja Y ovat kaksi vahvaa ratkaisua, niin $X = Y$.

Seuraava yksikäsitteisyysominaisuus kuvailee ratkaisujen *jakaumia.*

7.16. **Määritelmä.** Olkoon (X, B) ja (X', B') kaksi yhtälön (7.7) heikkoa ratkaisua. Sanomme, että yhtälön (7.7) ratkaisu on *jakaumaltaan yksikäsitteinen*, jos ehdosta $X_0 \sim X_0'$, seuraa, että $X \sim X'$ eli jos jokaisella $t_1 < \cdots < t_n$ on voimassa $(X(t_1), \ldots X(t_n)) \sim (X'(t_1), \ldots, X'(t_n))$.

Osoittautuu, että poluttainen yksikäsitteisyys on vahvempi kuin jakaumayksikäsitteisyys ja poluttain yksikäsitteisyys takaa ratkaisujen olevan vahvoja.

7.17. **Lause.** *Jos yhtälöllä* (7.7) *on poluttain yksikäsitteiset ratkaisut, niin*

i) *yhtälön ratkaisut ovat myös jakaumiltaan yksikäsitteisiä*
ii) *sekä yhtälön ratkaisut (jos olemassa) ovat aina vahvoja.*

Poluttainen yksikäsitteisyys on lisäksi aidosti vahvempi kuin jakaumayksikäsitteisyys. Esittelemme sitä varten Levyn lauseen.

7.18. **Lause.** *Jos X on jatkuva lokaali $(\mathscr{F}_t)$-martingaali, $X_0 = 0$ ja $\langle X \rangle_t = t$ jokaisella t, niin X on Brownin liike.*

Todistus. HT. □

7.19. **Esimerkki.** Olkoon B tavallinen 1-ulotteinen Brownin liike ja asetetaan

$$W_t := \int_0^t \operatorname{sgn}(B_t)\,\mathrm{d}B_t.$$

Tässä $\operatorname{sgn} x = [\,x \geq 0\,] - [\,x < 0\,]$. Tiedämme, että W_t on jatkuva lokaali martingaali ja

$$\langle W \rangle_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)^2\,\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{d}s = t.$$

Levyn lauseen nojalla tiedämme, että W on Brownin liike filtraation $\widehat{\mathscr{H}_t}$ suhteen.

Nyt tarkastelemme hyvin läheistä stokastista differentiaaliyhtälöä

$$(*) \qquad \mathrm{d}X_t = \operatorname{sgn}(X_t)\,\mathrm{d}W_t$$

Teemme yritteen

$$X_t^1 = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\,\mathrm{d}W_s.$$

Koska W on martingaali filtraation $(\widehat{\mathscr{H}_t})$ suhteen, niin integraali on hyvin määritelty. Tämä siksi, että B on luonnollisesti ennustettava historiansa suhteen, mistä voimme päätellä, että $\operatorname{sgn}(B_t)$ on optionaalinen prosessi. Vaikka määrittelimmekin integraalit ennustettaville prosesseille, olisimme pienellä lisätyöllä voineet käsitellä optionaalisetkin integrandit.

Siispä liitännäisyyslain avulla $\mathrm{d}X_t^1 = \operatorname{sgn}(B_t)\,\mathrm{d}W_t = \operatorname{sgn}(B_t)^2\,\mathrm{d}B_t$, joten $X_t^1 = B_t$ ja siis

$$X_t^1 = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\,\mathrm{d}W_s = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_t^1)\,\mathrm{d}W_s.$$

Olemme siten päätelleet, että pari (X^1, W) on stokastisen differentiaaliyhtälön $(*)$ heikko ratkaisu. Toisaalta voimme päätellä, että myös prosessi $X_t^2 = -B_t$ toteuttaa stokastisen differentiaaliyhtälön $(*)$, sillä

$$X_t^2 = -\int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\,\mathrm{d}W_s = \int_0^t \operatorname{sgn}(-B_s)\,\mathrm{d}W_s = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^2)\,\mathrm{d}W_s.$$

Tässä toinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että $\operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn}(x)$, kunhan $x \neq 0$ ja todennäköisyys sille, että Brownin liike viettäisi pisteessä 0 aidosti positiivisen ajan on nolla.

Olemme siten löytäneet toisenkin heikon ratkaisun (X^2, W). Molemmat ratkaisuista (X^1, W) ja (X^2, W) ovat adaptoitu saman filtraation $(\widehat{\mathscr{H}_t})$ suhteen. Koska Brownin liikeet ovat samat, niin jos yhtälöllä $(*)$ olisi poluttain yksikäsitteinen ratkaisu, niin silloin $X^1 = X^2$ eli $B = -B$, mikä on mahdotonta. Valitettavasti meillä ei ollut aikaa osoittaa riittävää koneistoa, jonka avulla olisimme voineet osoittaa, että X^1 (eikä X^2 eikä mikään muukaan ratkaisu) ole mitallinen prosessin W historian suhteen eli yhtälöllä ei ole vahvoja ratkaisuja.

Olemme siten päätelleet, että yhtälöllä $(*)$ ei ole poluttain yksikäsitteisiä ratkaisuja. Mutta jakaumaltaan ratkaisut ovat samat, sillä $X^2 \sim X^1$. Tämä pitää paikkaansa yleisestikin, sillä jos (X, B) on yhtälön

$$\mathrm{d}X_t = \operatorname{sgn}(X_t)\,\mathrm{d}B_t$$

heikko ratkaisu, niin tiedämme, että X_t on lokaali martingaali sekä $\langle X \rangle_t = t$. Siispä Levyn lauseella kaikki ratkaisut ovat Brownin liikkeitä eli jakaumat ovat yksikäsitteisesti määrättyjä.

Heikkoja ratkaisuja on siten hieman enemmän, joten olisi mukava tietää, kuinka paljon niitä on.

7.20. **Lause.** *Jos stokastisen differentiaaliyhtälön* (7.7) *kertoimet σ ja b ovat jatkuvia ja rajoitettuja, niin yhtälöllä on ainakin yksi heikko ratkaisu. Jos lisäksi löytyy $c > 0$, että $|\sigma(x)y| \geq c|y|$ jokaisella $y \in \mathbb{R}^d$, niin ratkaisu on jakaumaltaan yksikäsitteinen.*

Todistus. Sivuutetaan sillä tämä ei ole ihan selviö. □

Eräs tapa osoittaa edellinen lause on käyttää Markovin puoliryhmämenetelmiä ja funktionaalianalyysin keinoja. Toinen tapa on käyttää martingaalitekniikkaa, jota hienosti sovelsivat tähän Daniel W. Stroock ja S. R. Srinivasa Varadhan. Selvitämme näin lopuksi hieman tätä lähestymistapaa, sillä olemme soveltaneet sitä edellisissä esimerkeissä varsin läheisesti.

Jos tietäisimme, että yhtälöllä (7.7) on ratkaisu, voisimme päätellä seuraavaa. Jos $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ on kompaktisti kannattettu kahdesti jatkuvasti derivoituva funktio, niin

$$Z_t = \varphi(X_t)$$

on jatkuva semimartingaali filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen. Siispä Itōn kaavan avulla

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \sum_j \varphi_j(X_s)\,\mathrm{d}X_s^j + \tfrac{1}{2}\int_0^t \sum_{j,k} \varphi_{jk}(X_s)\,\mathrm{d}\langle X^j, X^k \rangle_t.$$

Siispä voimme laskea, että

$$\mathbf{E}\,\left(\varphi(X_t)\,|\,\mathscr{F}_s\right) = \varphi(X_s) + \mathbf{E}\left(\int_s^t \cdots + \tfrac{1}{2}\int_s^t \ldots\,|\,\mathscr{F}_s\right).$$

Martingaaliominaisuuden avulla

$$\mathbf{E}\left(\int_s^t \sum_k \varphi_j(X_u)\sigma^{jk}(X_u)\,\mathrm{d}B_u^k\,|\,\mathscr{F}_s\right) = 0$$

kullakin j, joten ensimmäisestä intergraalista jää jäljelle

$$\sum_j \mathbf{E}\left(\int_s^t \varphi_j(X_u)b^j(X_u)\,\mathrm{d}u\,|\,\mathscr{F}_s\right)$$

ja toimimalla vastaavasti kovarianssiprosessitermin kanssa havaitsemme lopulta, että

$$\mathbf{E}\,\left(\varphi(X_t)\,|\,\mathscr{F}_s\right) = \varphi(X_s) + \mathbf{E}\left(\int_s^t L\varphi(X_u)\,\mathrm{d}u\,|\,\mathscr{F}_s\right). \tag{7.21}$$

Siispä

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\left(M_t^\varphi\,|\,\mathscr{F}_s\right) &:= \mathbf{E}\left(\varphi(X_t) - \int_0^t L\varphi(X_u)\,\mathrm{d}u\,|\,\mathscr{F}_s\right)\\ &= \varphi(X_s) - \mathbf{E}\left(\int_0^s L\varphi(X_u)\,\mathrm{d}u\,|\,\mathscr{F}_s\right) = M_s^\varphi\end{aligned}$$

on $(\mathscr{F}_s)$-martingaali jokaisella $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$. Jos prosessi X on lisäksi Markovin prosessi (mutta ei yleensä aikastationaarinen), niin voisimme laskea hieman pidemmälle, sillä jos $v \leq s < t$, niin voimme ehdollistaa identiteetin (7.21) ajanhetkeen $v \leq s < t$, joten

$$\mathbf{E}_{v,X(v)}\,\mathbf{E}\,\left(M^\varphi(t)\,|\,\mathscr{F}_s\right) = \mathbf{E}_{v,X(v)}\,M^\varphi(s) \tag{7.22}$$

missä käytimme Markovin ominaisuutta siten, että

$$\mathbf{E}\,\left(Z\,|\,\mathscr{F}_v\right) = \mathbf{E}\,\left(Z\,|\,X_v\right) =: \mathbf{E}_{v,X(v)}\,Z$$

kun Z on $\mathscr{T}_v$-mitallinen ja integroituva satunnaismuuttuja. Olemme siten nähneet, että M_t^φ on *todennäköisyysmitan* $\mathbf{P}_{v,x}$ suhteen $(\mathscr{F}_t)$-martingaali välillä $[v,\infty)$ jokaisella $v \geq 0$ ja jokaisella $x \in \mathbb{R}^d$.

Daniel W. Stroock ja S. R. Srinivasa Varadhan käänsivät tilanteen päälaelleen ja ottivat tämän ominaisuuden (7.22) koko stokastisten differentiaaliyhtälöiden tutkimuksen pohjaksi ja esittivät *martingaaliongelman*.

7.23. **Määritelmä** (Martingaaliongelma)**.** Oletetaan, että A ja b ovat rajoitettuja ja mitallisia funktioita ja määrävät operaattorin L. Jos $(v,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ on annettu piste, niin todennäköisyysmitta $\mathbf{P}_{v,x}$ on *martingaaliongelman ratkaisu*, jos *i)* $\mathbf{P}_{v,x}\,(\,X_s = x$ jokaisella $0 \le s \le v\,) = 1$

ii) stokastinen prosessi (M_t^φ) on $(\mathscr{F}_t)$-martingaali todennäköisyysmitan $\mathbf{P}_{v,x}$ suhteen jokaisella $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

7.24. **Määritelmä.** Jos edellinen martingaaliongelma on ratkeava jokaisella $(v,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ ja ratkaisu on *yksikäsitteinen*, niin silloin sanomme, että martingaaliongelma $\mathrm{MP}(A,b)$ on *hyvin asetettu.*

Tämä martingaaliongelma yleistää tavallaan sen, mitä olemme pyrkineet koko ajan tekemään. Jos ulottuvuuksia on 1 ja funktiot $a(x) = 1$ ja $b(x) = 0$, niin martingaaliongelma on polynomiapproksimoinnin kanssa ”lähellä” sitä, että tietäisimme prosessin M^φ olevan martingaali, kun $\varphi^1(x) = x$ tai $\varphi^2(x) = x^2$. Siispä tällöin martingaaliongelma vastaisi tietoa siitä, että X_t on martingaali (sillä $L\varphi^1(x) = \frac{1}{2}D^2 x = 0$) sekä tietoa, että $X_t^2 - t$ on martingaali (sillä $L\varphi^2(x) = \frac{1}{2}D^2x^2 = 1$). Siispä Levyn lause sanoisikin jo, että X on Brownin liike, eli martingaaliongelma $\mathrm{MP}(1,0)$ vaikuttaisi hyvin asetellulta.

Emme valitettavasti voi käydä läpi martingaaliongelmien hyvin aseteltavuutta tarkasti, mutta voimme hieman käydä läpi, mitä voidaan päätellä.

7.25. **Lause.** *Oletetaan, että $\sigma\sigma^\top = A$. Martingaaliongelma* $\mathrm{MP}(A,b)$ *on hyvin asetettu jos ja vain jos stokastisella differentiaaliyhtälöllä* (7.7) *on heikko ratkaisu, joka on jakaumaltaan yksikäsitteinen.*

Todistus. Martingaaliongelman ratkaisuksi kelpaa heikon ratkaisun (X,B) prosessin X jakauma (eli jos $X_v = x$, niin prosessin $Y_t = X_{t\vee v}$ jakauma antaa yksikäsitteisen todennäköisyysmitan $\mathbf{P}_{v,x}$). Toiseen suuntaan meno vaatisi *hieman lisää päättelyitä*, joten kiinnostunut voi katsoa tätä vaikka Stroockin–Varadhanin kirjasta *Multidimensional Diffusion Processes* katsomalla Lukua 4. Lause 4.5.1. antaa itse asiassa lopulta tämän käänteisen suunnan. □

Siis martingaaliongelma on käytännössä sama asia kuin stokastisen differentiaaliyhtälön heikko ratkeavuus. Puuttuvat Markovin ominaisuudetkin saadaan nyt helposti.

7.26. **Lause** (Markovin ominaisuus)**.** *Jos martingaaliongelma* $\mathrm{MP}(\sigma\sigma^\top, b)$ *on hyvin asetettu ja jos* (X^x, B) *on stokastisen differentiaaliyhtälön* (7.7) *jakaumaltaan yksikäsitteinen heikko ratkaisu kun $X_0 = x$, niin*

$$\mathbf{E}\,\left(f(X_t^x)\,|\,\mathscr{F}_s\right) = \mathbf{E}_{s,X^x(s)}\,f\,(X_t^x) = v(t-s, X_s^x)$$

kun $v(t,z) = \mathbf{E}\,f(X_t^z)$ ja kun f on rajoitettu.

Todistus. Tuloksen todistus vaatisi hieman enemmän työkaluja todennäköisyysteoriasta, mitä meillä on, joten hahmotellaan vain ajatus. Markovin (myös vahva) ominaisuus tarkoittaa kutakuinkin sitä, että jos olemme ajanhetkellä $s < t$ tilassa $X(s) = z$, niin tapahtuman todennäköisyys, että myöhemmällä ajanhetkellä t olemme tilassa $X(t) = w$ ei riipu siitä, että millaista polkua pitkin kuljimme ajanhetkestä 0 ajanhetkeen s.

Jos aika on diskreetti, tämä oli itse asiassa alkuperäinen määritelmämme, mutta jatkuvassa tilanteessa tämä vaatii hieman lisää käsitteitä (säännölliset ehdolliset jakaumat ja muut kaverit) joten tyydymme hieman heuristiseen käsittelyyn. Koska tarvitsemme kuitenkin σ-algebra-merkintää, niin poikkeukselliseti kirjoitamme funktion σ muodossa $\widehat{\sigma}$.

Tiedämme, että (X^x, B) on yhtälön

$$(*) \qquad X_t = X_0 + \int_0^t \widehat{\sigma}(X_u)\,\mathrm{d}B_u + \tfrac{1}{2}\int_0^t b(X_u)\,\mathrm{d}u$$

ratkaisu, kun $X_0 = x$. Voimme kirjoittaa tämän myös muodossa

$$X_t^x = X_s^x + \int_0^t \widehat{\sigma}(X_u)\,\mathrm{d}B_u + \tfrac{1}{2}\int_s^t b(X_u)\,\mathrm{d}u$$

jokaisella $s < t$, joten voimme päätellä, että X_t^x on mitallinen σ-algebran

$$\mathscr{F}_{s,t} := \sigma(X_s^x \cup \{\ B_u :\ u \in [s,t]\ \})$$

suhteen. Siispä voimme päätellä, että

$$\mathbf{E}\left(f(X_t^x)\,|\,\mathscr{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(f(X_t^x)\,|\,X_s^x\right) = \mathbf{E}_{s,X^x(s)}\,f(X_t^x)$$

jokaisella mitallisella ja rajoitetulla funktiolla f. Siispä X^x on Markovin prosessi.

Haluamme vielä osoittaa, että $v(t-s, X_s^x) = \mathbf{E}\left(f(X_t^x)\,|\,X_s^x\right)$. Ajatusta hieman helpottaen oletamme, että $X_s^x = z$. Tällöin tiedämme, että $Y_t := X_{t+s}^x$ ja $Z_t := X_t^z$ ovat molemmat yhtälön $(*)$ ratkaisuja, kun $X_0 = z$. Koska martingaaliongelma on hyvin asetettu, on ratkaisun jakauma yksikäsitteinen. Siispä $Y_{t-s} \sim Z_{t-s}$, joten

$$\mathbf{E}\left(f(Y_{t-s})\,|\,Y_0 = z\right) = \mathbf{E}\left(f(Z_{t-s})\,|\,Z_0 = z\right)$$

Koska $\mathbf{E}_z\,f(Y_{t-s}) = \mathbf{E}\left(f(X_t^x)\,|\,X_s\right)$ ja $\mathbf{E}_z\,f(Z_{t-s}) = \mathbf{E}_z\,f(X_{t-s}^z) = v(t-s,z)$, niin väite lähestulkoon tuli osoitettua. $\square$

7.27. *Huomautus.* Odotusarvo $\mathbf{E}_{v,x}\,Z$ tulisi lukea *satunnaismuuttujan Z odotusarvona, kun ajanhetkellä v prosessi X on tilassa x.* Tämä eroaa aiemmin jatkuvasti käyttämästämme aikastationaarisesta tapauksesta siten, että jos esimerkiksi $Z = [\,X(t) \in A\,]$, niin nyt siis

$$\mathbf{P}\left(\,X_t \in A\,|\,\mathscr{F}_v\,\right) = \mathbf{P}_{v,X(v)}\left(\,X_t \in A\,\right)$$

kun aikastationaarisessa tapauksessa olisimme kirjoittaneet

$$\mathbf{P}\left(X_t \in A \,|\, \mathscr{F}_v \right) = \mathbf{P}_{X(v)}\left(\widetilde{X}_{t-v} \in A \right) = \mathbf{P}_{0,X(v)}\left(\widetilde{X}_{t-v} \in A \right)$$

missä $\widetilde{X}_t := X_{t+v}$. missä viimeinen on tämän yleisen tapauksen merkintä, mutta olemme siis pudottaneet aina nollan turhana pois. Tärkein ero on siis se, että aikastationaarisessa tapauksessa $\widetilde{X} \sim X$, mutta yleisessä tapauksessa tätä samaistusta ei voi siis tehdä.