6.4. **Feynmanin–Kacin kaava.** Edellisessä osassa näytimme, että tietyin oletuksin

$$u(x) = \mathbf{E}_x\, f(B_\tau)$$

on Dirichlet'n reuna-arvotehtävän

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{alueessa } G \\ u = f & \text{reunalla } \Gamma \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu, joka on C^2 alueessa G ja jatkuva sulkeumaan $\overline{G}$. Voimme kysyä, osaammeko esittää muiden reuna-arvotehtävien ratkaisut Brownin liikkeen avulla. Seuraavaksi tarkastelemme esimerkkinä Schrödingerin reuna-arvotehtävää.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\triangle u + qu = 0 & \text{alueessa } G \\ u = f & \text{reunalla } \Gamma \end{cases} \tag{6.16}$$

missä q on jatkuva ja rajoitettu funktio alueessa G. Tämä yleistää edellisen tehtävän, sillä $q = 0$ on jatkuva ja rajoitettu funktio alueessa G. Edellisen tehtävän varsinainen ratkaisu oli lemma jonka mukaan $Z_t = u(B_t)$ on lokaali martingaali jos ja vain jos $\triangle u = 0$. Voisimme kysyä löydämmekö vastaavan prosessin X_t, joka on lokaali martingaali jos ja vain jos $\frac{1}{2}\triangle u + qu = 0$.

Oletamme aluksi, että $\frac{1}{2}\triangle u + qu = 0$. Teemme rohkean yritteen ja kokeilemme ratkaisua $X_t = u(B_t)Y_t = Z_tY_t$, missä Y_t on vielä tuntematon reaaliarvoinen prosessi. Määräämme kuten viimeksi prosessin X_t stokastisen differentiaalin (tosin emme vielä tiedä, onko tämä sallittua) käyttämällä osittaisintegroinnin kaavaa.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= Y_t\,\mathrm{d}Z_t + Z_t\,\mathrm{d}Y_t + \mathrm{d}\langle\, Z, Y\,\rangle_t \\ &= Y_t\,\mathrm{d}M_t + \tfrac{1}{2}\triangle u(B_t)Y_t\,\mathrm{d}t + u(B_t)\,\mathrm{d}Y_t + \mathrm{d}\langle\, M, Y\,\rangle_t \end{aligned}$$

missä käytimme apuna edellisen osan semimartingaaliesitystä $\mathrm{d}Z_t = \mathrm{d}M_t + \frac{1}{2}\triangle u(B_t)\,\mathrm{d}t$. Prosessi Y on vielä vapaasti valittavissa, joten jos

$$\mathrm{d}Y_t = q(B_t)Y_t\,\mathrm{d}t \tag{6.17}$$

niin

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= \mathrm{d}M_t^1 + (\tfrac{1}{2}\triangle u(B_t) + q(B_t))Y_t\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}\langle\, M, Y\,\rangle_t \\ &= \mathrm{d}M_t^1 + \mathrm{d}\langle\, M, Y\,\rangle_t \end{aligned}$$

joten jos Y sattuisi olemaan vielä lokaalisti rajoitetusti heilahteleva, niin $\langle\, M, Y\,\rangle_t = 0$ ja siten X_t olisi lokaali martingaali. Eli yritämme ratkaista differentiaaliyhtälön (6.17). Jos $Y_t \neq 0$, niin voimme jakaa Y_t:llä puolittain. Siispä

$$\frac{\mathrm{d}Y_t}{Y_t} = \mathrm{d}\ln|Y_t| = q(B_t)\,\mathrm{d}t$$

Siispä päättelemme

$$Y_t = C \exp\Big(\int_0^t q(B_s)\,\mathrm{d}s\Big) =: C\exp(U_t).$$

Koska vakion C valinta on vapaa, valitsemme $C = 1$. Nyt voimme varmistua, että emme tehneet laittomuuksia. Koska prosessi U_t,

$$U_t = \int_0^t q(B_s)\,\mathrm{d}s$$

on jatkuva ja adaptoitu, on se ennustettava. Lisäksi U on lokaalisti rajoitettu, sillä q on rajoitettu, ja siten

$$|U_t - U_s| \leq \| \; q \,\|_\infty \int_s^t \;\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\| \, q \,\|_\infty (t-s)(t+s) \leq \| \, q \,\|_\infty t(t-s)$$

Tästä havaitsemmekin, että U on myös lokaalisti rajoitetusti heilahteleva, sillä

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\nabla_+ U(t_k)| \leq \| \, q \,\|_\infty t_n (t_n - t_0) = \| \, q \,\|_\infty t^2$$

millä tahansa välin $[0, t)$ jaolla. Siispä Itōn lauseen nojalla Y on myös lokaalisti rajoitetusti heilahteleva ja toteuttaa kaavan

$$\mathrm{d}Y_t = f'(U_t)\,\mathrm{d}U_t = Y_t\, q(B_t)\,\mathrm{d}t$$

Tästä seuraa siten myös, että $\langle\, M, Y \,\rangle_t = 0$, joten kaiken kaikkiaan

$$X_t = u(B_t) e^{U_t}$$

on lokaali martingaali välillä $[0, \tau)$ jos $\frac{1}{2}\triangle u + qu = 0$ alueessa G. Jos valitsemme rajoitetut pysähdyshetket $\tau_n' := \tau_n \wedge n$ joille $\tau_n' \uparrow \tau$ ja $X^{\tau_n'}$ on tasaisesti integroituva martingaali, niin optionaalisen pysäyttämisen lauseen nojalla

$$\mathbf{E}_x\, X_0 \;= u(x) e^0 = \mathbf{E}_x\, u(B(\tau_n')) \exp\left(U(\tau_n')\right) \;.$$

Siispä

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_x\, u(B(\tau_n')) \exp\left(U(\tau_n')\right) \;.$$

Jos voisimme viedä raja-arvon odotusarvon sisään, niin voisimme kirjoittaa

$$u(x) = \mathbf{E}_x\, f(B_\tau) \exp\left(\int_0^\tau q(B_s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Tämä on niin sanottu *Feynmanin–Kacin kaava*. Mutta kuinka raja-arvon voisi siirtää odotusarvon sisälle. Monotonista suppenemista ei voi nyt käyttää, sillä jono ei selvästi ole monotoninen. Jäljelle jää lähinnä dominoidun suppenemisen käyttö, mutta mikä on dominoiva satunnaismuuttuja tässä tapauksessa?

Jos u on haluttu ratkaisu, niin se on rajoitetussa ja suljetussa joukossa $\overline{G}$ jatkuvana rajoitettu, joten $u(B(\tau_n'))$ on rajoitettu, joten se ei taatusti muodosta ongelmia. Termi $\exp(U(\tau_n'))$ ei riipu funktiosta f eikä ratkaisusta u lainkaan, joten se liittyy vain alueen G sekä potentiaalitermin q ominaisuuksiin. Merkitsemmekin jatkossa prosessia $\exp(U_t)$ prosessilla $e(q)_t$. Lisäksi merkitsemme satunnaismuuttujaa $e(q)_\tau$ erikoisesti $e(q, G)$, sillä alueestahan poistumishetki τ vain riippuu.

Havaitsemme, että

$$U_t \leq \int_9^t q_+(B_s)\,\mathrm{d}s \leq \int_0^\tau q_+(B_s)\,\mathrm{d}s$$

joten

$$|\exp(U(\tau_n'))| = \exp(U(\tau_n')) \leq \exp(\int_0^\tau q_+(B_s)\,\mathrm{d}s) = e_{q_+}(\tau)$$

Jos siis $e_{q_+}(\tau)$ on integroituva, niin tällöin raja-arvon voi viedä dominoidun suppenemisen lauseen nojalla sisällä. Olemme siten osoittaneet, että

6.18. **Lemma.** *Oletetaan, että* $\mathbf{E}_x\, e(q_+, G) < \infty$ *jokaisella* $x \in G$. *Jos* u *on reuna-arvotehtävän* (7.1) *ratkaisu, niin*

$$u(x) = \mathbf{E}_x\, f(B_\tau) e(q, G) = \mathbf{E}_x\, f(B_\tau) \exp\Big(\int_0^\tau q(B_s)\,\mathrm{d}s\Big)$$

Havaitsemme suoraan, että jos $q \leq 0$, niin $q_+ = 0$ jolloin $e(q_+, G) = 1$. Siis ehto $\mathbf{E}_x\, e(q_+, G) = 1 < \infty$ on tällöin selviö. Havaitsemme siten myös, että Lemman 6.18 kaava yleistää edellisen osan esityskaavan, sillä jos $q = 0$, niin $e(q, G) = 1$.
Luonnollinen kysymys on, että milloin ehto $\mathbf{E}_x\, e(q_+, G) < \infty$ ei toteudu ?

6.19. **Esimerkki.** Jos $d = 1$ ja $G = (0, \pi)$ ja $q(x) = \lambda > 0$. Tällöin yhtälö

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\triangle u + qu = u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0, u(\pi) = 0 \end{cases}$$

on ratkaistavissa suljetussa muodossa. Tiedämme, että ratkaisu on muotoa

$$u(x) = c_1 \sin(\sqrt{2\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{2\lambda} x).$$

Nyt $c_2 = 0$ sillä $u(0) = c_2$. Havaitsemme, että $u(\pi) = c_1 \sin(\sqrt{2\lambda}\pi) = 0$ jos $c_1 = 0$ tai $\sin(\sqrt{2\lambda}\pi) = 0$. Jälkimmäinen on nolla vain, kun $\sqrt{2\lambda} \in \mathbb{Z}$ eli jos $\lambda = \frac{1}{2}k^2$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$.

Siispä $u = 0$ jos $\lambda \neq \frac{1}{2}k^2$ ja jos $\lambda = \frac{1}{2}k^2$, niin $u = c \sin(k\pi x)$. Edellisen lemman perusteella tiedämme, että jos $\mathbf{E}_x\, e(\lambda, G) < \infty$, niin tällöin $u = 0$. Siispä havaitsemme, että kun $\lambda = \frac{1}{2}$ ei $\mathbf{E}_x\, e(\frac{1}{2}, G)$ voi olla äärellinen. Koska $e(\lambda, G) > e(\frac{1}{2}, G)$ aina, kun $\lambda > \frac{1}{2}$, joten päättelemme, että

$$\mathbf{E}_x\, e(\lambda, G) = \mathbf{E}_x\, e^{\lambda\tau} = \infty$$

aina kun $\lambda \geq \frac{1}{2}$. Lemmamme oletus siis jossakin mielessä käsittelee poistumishetken τ eksponentiaalisten momenttien olemassaoloa.

Edellisestä päättelimme, että liian suuret potentiaalit eivät voi toteuttaa integroituvuusehtoa. Toisaalta nämä ehdot liittyivät suoraan poistumishetkeen eli alueeseen G. Jos pienennämme aluetta eli lyhennämme väliä $(0, \pi)$ väliksi $G' := (0, \pi/n)$ jollakin $n \geq 1$, niin vastaavan reuna-arvotehtävän ratkaisut saadaan skaalaamalla. Eli ratkaisu $u(x) = \sin x$ skaalautuu ratkaisuksi $\widetilde{u}(x) = \sin nx$. Sama päätelmä antaa silloin, että $\mathbf{E}_x\, e(\lambda, G') = \infty$, kun $\lambda \geq \frac{1}{2}n^2$. Eli pienemmällä alueella voimme mahdollisesti sallia suurempia potentiaaleja. Mutta valitettavasti emme vielä tiedä, onko $\mathbf{E}_x\, e(\lambda, G') < \infty$, kun $\lambda < \frac{1}{2}n^2$.

Olemme nyt havainneet, että Lemman 6.18 ehto ei ole selviö, joten nimitämme niitä potentiaaleja q *mitattaviksi alueessa* G (engl. *gaugeable*) joille $\mathbf{E}_x\, e(q_+, G) < \infty$ jokaisella $x \in G$.

Jos oletamme, että potentiaali on mitattavissa, voimme osoittaa, että Lemman 6.18 määrittelemä funktio on todellakin ratkaisu. Kuten aiemminkin, näytämme että prosessi $X_t = u(B_t)e(q)_t$ on lokaali martingaali, kun $u(x) = \mathbf{E}_x\, f(B_\tau)e(q, G)$. Tämä seuraa vastaavasti Brownin liikkeen Markovin ominaisuudesta, sillä

$$\begin{aligned}
[\, s < \tau\,]u(B_s)e(q)_s &= [\, s < \tau\,]e(q)_s \mathbf{E}_{B(s)}\, f(B_\tau)e(q, G) \\
&= [\, s < \tau\,]\mathbf{E}\, \Big(f(B_\tau)e(q)_s \exp\Big(\int_s^\tau q(B_t)\,\mathrm{d}t\Big) \,|\, \mathscr{F}_s \Big) \\
&= [\, s < \tau\,]\mathbf{E}\, \Big(f(B_\tau) \exp\Big(\int_0^s + \int_s^\tau q(B_t)\,\mathrm{d}t\Big) \,|\, \mathscr{F}_s \Big) \\
&= [\, s < \tau\,]\mathbf{E}\, (f(B_\tau)e(q, G) \,|\, \mathscr{F}_s).
\end{aligned}$$

Oikealla puolella on lokaali martingaali välillä $[0, \tau)$ joten myös X_t on lokaali martingaali. Vastaavasti soveltamalle vahvaa Markovin ominaisuutta kun η on poistumishetki kuulasta $G_r := D(x, r)$, että

$$\begin{aligned}
u(x) &= \mathbf{E}_x\, \mathbf{E}\, (f(B_\tau)e(q, G) \,|\, \mathscr{F}_\eta) \\
&= \mathbf{E}_x \Big(\Big(\exp(\int_0^\eta q(B_t)\,\mathrm{d}t) \Big) \mathbf{E}_{B(\eta)}\, f(B_\tau)e(q, G) \Big) \\
&= \mathbf{E}_x\, u(B_\eta)e(q, G_r)
\end{aligned}$$

Kun r on hyvin pieni, niin η on suurella todennäköisyydellä hyvin pieni. Silloin voimme kirjoittaa mittatermin $e(q, G_r)$ approksimatiivisesti:

$$\int_0^\eta q(B_t)\,\mathrm{d}t = q(B_0)\eta + \mathrm{o}(\eta) \Longrightarrow e(q, G_r) = 1 + q(B_0)\eta + \mathrm{o}(\eta)$$

Siispä

$$\mathbf{E}_x \Big(\big(u(B_\eta) - u(x) \big) + q(B_0)u(B_\eta)\eta + \mathrm{o}(\eta) \Big) = 0. \tag{6.20}$$

Oletetaan, että tiedämme jo, että u on jatkuva. Tällöin termi

$$q(B_0)u(B_\eta)\eta = q(B_0)u(B_0)\eta + \mathrm{o}(\eta),$$

sillä myös Brownin liike on tunnetusti jatkuva. Voimme siten laskea, että

$$\mathbf{E}_x\, q(B_0)u(B_\eta)\eta = q(x)u(x)\mathbf{E}_x\, \eta + \mathrm{o}(\mathbf{E}_x\, \eta).$$

Palautamme mieleen, että laskimme esimerkissä 4.5 että $\mathbf{E}_x\, \eta = r^2/d$. Siispä olemme jo päätelleet, että *jos u on jatkuva*, niin

$$\mathbf{E}_x \left(u(B_\eta) - u(x) \right) + \frac{r^2 q(x)u(x)}{d} + \mathrm{o}(r^2) = 0 \tag{6.21}$$

Olemme melkein näyttäneet, että u toteuttaa Schrödingerin yhtälön $\frac{1}{2}\triangle u + qu = 0$, sillä

6.22. **Lemma.** *Jos $u \in C^2$, niin*

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathbf{E}_x \left(u(B_\eta) - u(x) \right)}{r^2} = \frac{\triangle u(x)}{2d}$$

Todistus. Taylorin kaavan käyttö (HT). □

Mutta tavoitteemme oli osoittaa, että u on riittävän sileä, jotta voisimme derivoida sitä, joten emme voi olettaa, että u on kahdesti jatkuvasti derivoituva ja päätellä tämän avulla, että u onkin kahdesti jatkuvasti derivoituva.

Voimme kuitenkin osoittaa, että u toteuttaa Schrödingerin yhtälön *heikosti* eli kun korvaamme derivaatan käsitteen *heikon derivaatan* käsitteellä. Tämä tarkoittaa sitä, että esimerkiksi reaaliarvoisen yhden muuttujan funktion $f(x) = |x|$ heikko derivaatta on funktio $f'(x) = \operatorname{sgn} x$. Heikko derivaatta määritellään implisiittisesti yhtälöiden

$$\int f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

avulla, minkä tulee olla voimassa aina kun φ on sileä ja häviää identtisesti kompaktin joukon ulkopuolella. Jos funktio f on tavallisesti derivoituva, niin tämä yhtälö on osittaisintegroinnin kaava. Huomautamme, että nämä yhtälöt määräävät heikon derivaatan melkein kaikilla x. Esimerkiksi kun $f(x) = |x|$, niin

$$\begin{aligned} -\int f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^\infty x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 -x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{sgn} x\, \varphi(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

joten päättelemme, että $f'(x) = \operatorname{sgn} x$. Laplacen operaattorin *heikko muotoilu* on osittain integroimalla kahdesti siten

$$\int \triangle u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)\triangle\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Schrödingerin yhtälön heikko muoto on siten

$$0 = \int \Big(\tfrac{1}{2}\triangle u(x) + q(x)u(x)\Big)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)\Big(\tfrac{1}{2}\triangle\varphi(x) + q(x)\varphi(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

kun φ on vähintään kahdesti jatkuvasti derivoituva ja häviää alueen G kompaktin osajoukon ulkopuolella.

Kaava (7.2) on melkein jo heikko muotoilu. Jaamme sen puolittain luvulla r^2/d, kerromme *testifunktiolla* φ ja integroimme yli alueen G. Havaitsemme siten, että

$$0 = \int_G \frac{\varphi(x)\mathbf{E}_x\Big(u(B_\eta) - B(x)\Big)\,d}{r^2} + \varphi(x)q(x)u(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{o}(1)$$

Koska φ häviää jonkin alueen G kompaktin osajoukon ulkopuolella, voimme hyvin ajatella, että φ on määritelty koko avaruudessa $\mathbb{R}^d$ ja on nolla alueen G ulkopuolella. Tällöin voimme kirjoittaa ensimmäisen termin edellisestä identiteetistä

$$\int_G \frac{\varphi(x)\mathbf{E}_x\Big(u(B_\eta) - u(x)\Big)\,d}{r^2}\,\mathrm{d}x = \frac{d}{r^2}\int \mathrm{d}x \int \mu(\mathrm{d}y)\varphi(x)(u(x+y) - u(x))$$

Jaamme lineaarisuuden avulla integraali kahteen osaan. Vaihdamma integrointijärjestystä Fubinin lauseen avulla, jolloin

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x \int \mu(\mathrm{d}y)\varphi(x)u(x+y) &= \int \mu(\mathrm{d}y)\int \mathrm{d}x\,\varphi(x)u(x+y)\\ &= \int \mu(\mathrm{d}y)\int \mathrm{d}x\,\varphi(x-y)u(x).\end{aligned}$$

Jälkimmäisen yhtäsuuruuden saimme muuttujan vaihdolla $x' = x + y$. Vaihtamalla kerran vielä integroimisjärjestystä olemme siten päätelleet, että

$$\begin{aligned}\int_G \frac{\varphi(x)\mathbf{E}_x\Big(u(B_\eta) - u(x)\Big)\,d}{r^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{d}{r^2}\int \mathrm{d}x\,u(x)\int \mu(\mathrm{d}y)\varphi(x-y) - \varphi(x)\\ &= \int \frac{u(x)\mathbf{E}_x\Big(\varphi(-B_\eta) - \varphi(x)\Big)\,d}{r^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_G u(x)(\tfrac{1}{2}\triangle\varphi(x) + \mathrm{o}(1))\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

kunhan r on riittävän pieni. Yhdistämällä havaitsemme, että

$$0 = \int u(x)\Big(\tfrac{1}{2}\triangle\varphi(x) + q(x)\varphi(x)\Big)\,\mathrm{d}x + \mathrm{o}(1)$$

joten antamalla $r \downarrow 0$ olemme päätelleet, että

6.23. **Lemma.** *Jos u on jatkuva, niin $\frac{1}{2}\triangle u + qu = 0$ heikossa mielessä alueessa G.*

Jatkuvuuden päätteleminen ei ole kovinkaan ongelmallista, ainakin jos oletamme, että u on rajoitettu ja mitallinen. Tällöin kaavan (7.3) mukaan

$$u(x) = \mathbf{E}_x\, u(B_\eta) + \mathbf{E}_x\, \mathscr{O}\eta = \int u(y)\mu(s, \mathrm{d}y) + \mathscr{O}r^2$$

Integroimalla säteen r yli havaitsemme, että

$$u(x) = \fint_{|y-x|<r} u(y)\,\mathrm{d}y + \mathscr{O}r^2$$

Tämän avulla päättelemme helposti, että u on jatkuva pisteessä x. (HT). Voimme nyt keskittyä tarkastelemaan, milloin potentiaali q on mitattava aluueessa G. Osoitamme, että rajoitettu potentiaali on aina mitattava, kunhan alue on riittävän pieni.

6.24. **Lemma.** *Jos q on rajoitettu alueessa G, niin jokaista pistettä $x \in G$ kohti löytyy sellainen säde $r > 0$, että q on mitattava avoimessa kuulassa $D(x, r)$.*

Todistus. Koska q on rajoitettu, niin q_+ on rajoitettu. Nyt $e(q_+, D(x,r)) \leq \exp\Big(\| q \|_\infty \tau_r\Big)$, kun τ_r on poistumishetki kiekosta $D(x, r)$. Kun r on pieni, niin τ_r on myös pieni suurella todennäköisyydellä, joten $\exp(\| q \|_\infty \tau_r)$ on pieni myös suurella todennäköisyydellä. Tämä ei todellakaan käy vielä todistuksesta, joten hieman tarkemmin.

Tarvitsemme arvion satunnaismuuttujan τ_r käyttäytymisestä. Laskemme ensin todennäköisyyden sille, että

$$\mathbf{P}_y\,(\, \tau_r > 1 \,) \leq \mathbf{P}_y\,(\, |B_1 - x| < r \,) = \mathbf{P}_0\,(\, |B_1| < r \,) =: \rho < 1$$

jokaisella $y \in D(x, r)$. Luku $\rho = \rho(r)$ riippuu pallon säteestä r ja tiedämme jopa, että $\rho(r) \downarrow 0$, kun $r \downarrow 0$.

Nyt tapahtuma $\{\tau_r > 2\}$ voidaan kirjoittaa muodossa $\{\tau_r > 1 \text{ ja } \tau_r' > 1\}$, missä $\tau_r' = \inf\{\ t > 0 :\ \ B_{1+t} \notin D(x, r)\ \}$. Pysäytyshetki τ_r' riippuu vain tulevaisuudesta $\mathscr{T}_1 = \sigma\{\ B_t :\ t > 1\ \}$, joten Markovin ominaisuuden avulla

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_y\,(\, \tau_r > 2\,) &= \mathbf{E}_y\,[\, \tau_r > 1\,]\mathbf{E}\,\big([\, \tau_r' > 1\,]\,|\,\mathscr{F}_1\big) \;= \mathbf{E}_y\,[\, \tau_r > 1\,]\mathbf{P}_{B(1)}\,(\,[\, \tau_r > 1\,]\,)\\ &\leq \rho\mathbf{P}_y\,(\, \tau_r > 1\,) \leq \rho^2\end{aligned}$$

Ehdollistamalla ajanhetkiin $t = n$, niin tästä induktion avulla näemme, että

$$\mathbf{P}_y\,(\, \tau_r > n\,) \leq \rho^n$$

jokaisella n ja jokaisella $y \in D(x,r)$. Erityisesti osoitimme lopulta tarkasti, että $\tau_r < \infty$ melkein varmasti jokaisella $y \in D(x,r)$, sillä $\mathbf{P}_y(\tau_r > n) \to 0$, kun $n \to \infty$.

Tunnemme nyt varsin hyvin satunnaismuuttujan τ_r häntäkäytöksen. Tämän avulla voimme helposti arvioida, kuinka hyvin integroituva satunnaismuuttuja onkaan. Haluamme osoittaa, että satunnaismuuttujalla τ_r on äärellisiä eksponentiaalisia momentteja, sillä tämähän oli lemman väite.

Merkitsemme $p_k := \mathbf{P}_y(\tau_r > k)$ ja merkitsemm $\lambda := \| q \|_\infty \geq 0$. Voimme käyttää yksinkertaista arviota $\exp(\lambda\tau_r) \leq \exp(\lambda \lceil \tau_r \rceil)$, joten

$$\mathbf{E}_y\, e^{\lambda\tau_r}[\,\tau_r < N\,] \leq \mathbf{E}_y\, e^{\lambda\lceil\tau_r\rceil}[\,\tau_r < N\,] = \sum_{k=1}^{N} e^{\lambda k}\mathbf{P}_y(\lceil\tau_r\rceil = k)\,. \tag{6.25}$$

Teemme oleellisen havainnon eli osaamme määrätä satunnaismuuttujan τ_r jakauman lukujen (p_k) avulla. Tämä siksi, että

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_y(\lceil\tau_r\rceil = k+1) = \mathbf{P}_y(k < \tau \leq k+1) &= \mathbf{P}_y(\tau > k) - \mathbf{P}_y(\tau > k+1) \\ &= -\nabla_+ p_k.\end{aligned}$$

Voimme siten laskea summan (7.21) Abelin summauksella, joten

$$-\sum_{k=0}^{N-1} e^{\lambda(k+1)}\nabla_+ p_k = -(e^{\lambda N}p_{N-1} - e^{\lambda}p_0) + \sum_{k=1}^{N-1} p_k\nabla_+ e^{\lambda k}. \tag{6.26}$$

Ensimmäistä termiä voidaan arvioida

$$e^{\lambda N}p_{N-1} \leq (e^{\lambda})^N\rho^{N-1} = (e^{\lambda}\rho)^N\rho^{-1}.$$

Oikea puoli lähestyy nollaa, jos $e^{\lambda}\rho < 1$. Koska huomasimme, että saamme luvun ρ niin pieneksi kuin halutaan valitsemalla säteen r riittävän pieneksi, voimme olettaa tämän. Koska $\nabla_+ e^{\lambda k} = (e^{\lambda} - 1)e^{\lambda k}$, niin voimme arvioida myös summaa

$$\sum_{k=1}^{N-1} p_k\nabla_+ e^{\lambda k} \leq (e^{\lambda} - 1)\sum_{k=1}^{\infty}(\rho e^{\lambda})^k = \frac{e^{\lambda} - 1}{1 - \rho e^{\lambda}} < \infty.$$

Voimme siis päätellä, että $\mathbf{E}_y\, e^{\lambda\tau_r}[\,\tau_r < N\,] \leq C < \infty$ jokaisella N, joten siis $\mathbf{E}_y\, e^{\lambda\tau_r} < \infty$ monotonisen suppenemisen lauseen nojalla. □

6.27. *Huomautus.* Edellisessä lemmassa saatoimme valita säteen samaksi eli valitsimme $r > 0$ niin pieneksi, että $\mathbf{P}_0(|B_1| < r) < e^{-\| q \|_\infty}$. Jos q ei olekaan rajoitettu, vaan joissakin kohdissa kasvaa rajatta, niin edellisen lemman tarkastelua voi tarkentaa ja tällöin säde riippuu myös pisteestä.

Nyt voimme myös osoittaa mittafunktion $w(x) := \mathbf{E}_x\, e(q,G)$ tärkeän ominaisuuden, joka selittää sen, että saatoimme olettaa, että $w(x) < \infty$ jokaisella $x \in G$. Tämä siksi, että jos $w(x) = \infty$ jollakin $x \in G$, niin silloin $w \equiv \infty$.

6.28. **Lemma.** *Jos mittafunktio $w \not\equiv \infty$ alueessa G, niin $w(x) < \infty$ jokaisella $x \in G$. Erityisesti w on jatkuva koko alueessa G.*

Todistus. Väitteen oletus sanoo sen, että löydämme pisteen $x \in G$, jolla $w(x) < \infty$. Koska G on avoin ja yhtenäinen, niin topologian kursseilta tiedämme, että väitteen osoittamiseksi riittää osoittaa, että tällöin löydämme jonkin pisteen x ympäristön $D(x, r)$ jossa $w(y) < \infty$ jokaisella $y \in D(x, r)$. Tämä seuraa siitä, että jos V on niiden pisteiden $y \in G$ joukko, joilla $w(y) < \infty$, niin edellinen väite näyttää, että V on sekä avoin että suljettu joukko G:ssä, eli V on yhtenäinen. Siten $V = G$.

Oletamme siis, että $w(x) = \mathbf{E}_x\, e(q, G) < \infty$. Käytämme hyväksi edellisen lemman tulosta, jonka mukaan löydämme avoimen kuulan $G_r := D(x, r)$, jossa

$$\sup_{y \in G_r} \mathbf{E}_y\, e(q, G_r) \le \sup_{y \in G_r} \mathbf{E}_y\, \exp(\| q \|_\infty \tau_r) =: M < \infty.$$

Mitähän hyötyä tästä oikein on ? No, voimme yrittää käyttää vahvaa Markovin ominaisuutta pysähdyshetkellä $\eta := \tau_r$, jolloin

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\, \left(e(q, G) \,|\, \mathscr{F}_\eta\right) &= \mathbf{E}\Big(\exp\Big(\int_0^\eta q(B_t)\,\mathrm{d}t\Big) \exp\Big(\int_\eta^\tau q(B_t)\,\mathrm{d}t\Big) \Big|\, \mathscr{F}_\eta\Big) \\ &= e(q, G_r)\mathbf{E}_{B(\eta)}\, \exp\Big(\int_0^\tau q(B_t)\,\mathrm{d}t\Big) \\ &= e(q, G_r) w(B_\eta) \ge \exp\Big(-\| q \|_\infty \eta\Big) w(B_\eta). \end{aligned}$$

Jotta tämä lasku oli sallittu, on Brownin liike lähetettävä liikkeelle pisteestä x, jolloin $e(q, G)$ on oletuksen mukaan integroituva. Lisäksi tarvitsimme satunnaismuuttujan $e(q, G_r)$ integroituvuutta, jotta pystyimme päättelemmään myös viimeisen satunnaismuuttujan integroituvuuden. Laskemalla nyt edellisestä epäyhtälöstä odotusarvot puolittain, saamme

$$\mathbf{E}_x\, \exp\Big(-\| q \|_\infty \eta\Big) w(B_\eta) \le \mathbf{E}_x\, e(q, G) < \infty.$$

Nyt sovellamme Brownin liikkeen rotaatioinvarianssia ja sitä, että pallo on täysin rotaatiosymmetrinen, jonka nojalla

$$\mathbf{E}_x\, f(\eta) g(B_\eta) = \mathbf{E}_x\, f(\eta) \mathbf{E}_x\, g(B_\eta)$$

eli lähdettäessä kuulan keskipisteestä poistumishetki η ja poistumiskohta B_η ovat riippumattomia satunnaismuuttujia (HT). Tämän riippumattomuusominaisuuden avulla saamme siten

$$\mathbf{E}_x\, \exp\Big(-\| q \|_\infty \eta\Big) w(B_\eta) = \mathbf{E}_x\, \exp\Big(-\| q \|_\infty \eta\Big)\, \mathbf{E}_x\, w(B_\eta) \le \mathbf{E}_x\, e(q, G)\,.$$

Jensenin epäyhtälön avulla havaitsemme, että

$$\mathbf{E}_x \exp\Big(- \| q \|_\infty \eta \Big) = \mathbf{E}_x \frac{1}{\exp\Big(\| q \|_\infty \eta \Big)} \geq \frac{1}{\mathbf{E}_x \exp\Big(\| q \|_\infty \eta \Big)} \geq \frac{1}{M} > 0$$

joten voimme jakaa luvulla $\mathbf{E}_x \exp\Big(- \| q \|_\infty \eta \Big)$ ja päättlemme siten, että

$$\mathbf{E}_x\, w(B_\eta) = \int w(x + ry) s(\,\mathrm{d}y) < \infty$$

Integroimalla säteen suhteen välin $[0, r]$ yli päättelemme tästä, että

$$\int w(y)[\, y \in D(x, r)\,]\,\mathrm{d}y < \infty.$$

Siispä $w(y) < \infty$ melkein kaikilla $y \in D(x, r)$. Mutta voimme silloin soveltaa aikasempaa tietoa, että tällöin w on myös jatkuva kiekossa $D(x, r)$. Siispä $w(y) < \infty$ jokaisella $y \in D(x, r)$ ja väite seuraa siten. □

Viimeisenä palasena on osoittaa, että ratkaisu $u(x) = \mathbf{E}_x\, f(B_\tau) e(q, G)$ on jatkuva reunalle asti.

6.29. **Lemma.** *Oletetaan, että $x \in \Gamma$ on säännöllinen. Jos f on jatkuva ja q on rajoitettu, sekä $\mathbf{E}_z\, e(q_+, G) < \infty$ jokaisella $z \in G$, niin $u(x_n) \to u(x)$ jokaisella jonolla $(x_n) \subset G$, jolle $x_n \to x$.*

Todistus. Tiedämme jo, että jos $\delta > 0$ ja $x_n \to x$, niin

$$\mathbf{P}_{x_n}(\, \tau < \delta \,) \to 1$$

ja

$$\mathbf{P}_{x_n}(\, B_\tau \in D(x, \delta)\,) \to 1$$

kun $n \to \infty$. Joten jos $\| q \|_\infty \leq M$, niin

$$\mathbf{P}_{x_n}\left(\exp \int_0^\tau q(B_s)\,\mathrm{d}s \leq \exp(\delta M) \right) \to 1$$

ja vastaavasti

$$\mathbf{P}_{x_n}\left(\exp \int_0^\tau q(B_s)\,\mathrm{d}s \geq \exp(-\delta M) \right) \to 1.$$

Tästä seuraakin edelleen, koska f on jatkuva ja koska Γ on kompakti, niin myös rajoitettu, että

$$\mathbf{E}_{x_n}[\, \tau < \delta \,] e(q, G) f(B_\tau) = f(x)\Big(\mathbf{P}_{x_n}(\, \tau < \delta \,) + \mathbf{E}_{x_n}[\, \tau < \delta \,](e(q, G) - 1) \Big) + \mathrm{o}(1).$$

Ensimmäinen termi on $f(x) + \mathrm{o}(1)$ ja koska

$$[\, \tau < \delta \,](e(q, G) - 1) \leq [\, \tau < \delta \,](e^{\delta M} - 1) = [\, \tau < \delta \,]\Big(M\delta + \mathscr{O}\delta^2 \Big)$$

sekä vastaavasti

$$[\,\tau < \delta\,](e(q,G)-1) \ge [\,\tau < \delta\,]\Big(-M\delta + \mathscr{O}\delta^2\Big)$$

niin kaiken kaikkiiaan

$$\mathbf{E}_{x_n}\,[\,\tau < \delta\,]e(q,G)f(B_\tau) \; = f(x) + \mathrm{o}(1) + \mathscr{O}\delta$$

Jäljellä on enää termi $\mathbf{E}_{x_n}\,[\,\tau \ge \delta\,]e(q,G)f(B_\tau)$, jonka siis haluaisimme menevän nollaan. Voimme heti arvioida satunnaismuuttujaa $f(B_\tau)$ vakiolla $\|\, f\,\|_\infty$ sekä satunnaismuuttujaa $e(q,G)$ satunnaismuuttujalla $e(q_+,G)$, joten jäljelle jää termi

$$\mathbf{E}_{x_n}\,[\,\tau \ge \delta\,]e(q_+,G)$$

Merkitsemme mittafunktiota $w(x) = \mathbf{E}_x\, e(q_+,G)$ ja sovellamme Markovin ominaisuutta ajanhetkellä δ. Koska

$$e(q_+,G) = \exp\Big(\int_0^\tau q_+(B_s)\,\mathrm{d}s\Big) = \exp\Big(\int_0^\delta q_+(B_s)\,\mathrm{d}s\Big)\exp\Big(\int_\delta^\tau q_+(B_s)\,\mathrm{d}s\Big),$$

niin

$$\begin{aligned}[\,\tau \ge \delta\,]\mathbf{E}\,\left(e(q_+,G)\,|\,\mathscr{F}_\delta\right) \; &\le [\,\tau \ge \delta\,]e^{M\delta}\mathbf{E}_{B(\delta)}\, e(q_+,G)\\ &= [\,\tau \ge \delta\,]e^{M\delta}w(B_\delta)\end{aligned}$$

joten

$$\mathbf{E}_{x_n}\,[\,\tau \ge \delta\,]e(q_+,G) \; = \mathbf{E}_{x_n}\,[\,\tau \ge \delta\,]\mathbf{E}\,\left(e(q_+,G)\,|\,\mathscr{F}_\delta\right) \; \le \mathbf{E}_{x_n}\,[\,\tau \ge \delta\,]e^{M\delta}w(B_\delta)\,.$$

Nyt olemmekin jo lähes valmiita, sillä $\|\, w\,\|_\infty < \infty$, joten

$$\mathbf{E}_{x_n}\,[\,\tau \ge \delta\,]e(q_+,G) \; \le e^{M\delta}\|\, w\,\|_\infty \mathbf{P}_{x_n}\,(\,\tau \ge \delta\,) = \mathrm{o}(1)$$

Siispä kaiken kaikkiaan

$$u(x_n) = f(x) + \mathrm{o}(1) + \mathscr{O}\delta.$$

Kun $n \to \infty$, niin $|\lim u(x_n) - f(x)| \le C\delta$, joten antamalla $\delta \to 0$, päättelemme, että $u(x_n) \to f(x)$. Koska x oli lisäksi säännöllinen piste, niin $u(x) = f(x)$, joten väite seuraa. □

Voimme koota Feynmanin–Kacin kaava -tarkastelumme yhteen lauseeseen.

6.30. **Lause.** *Oletetaan, että q on jatkuva ja rajoitettu alueessa G ja mittafunktio $w \not\equiv \infty$. Jos alueen G reuna Γ on säännöllinen, niin*

$$u(x) = \mathbf{E}_x\, f(B_\tau)e(q,G)$$

on reuna-arvotehtävän (7.1) *yksikäsitteinen ja jatkuva heikko ratkaisu.*