6. Sovelluksia stokastiselle integroinnille

6.1. **Uusia martingaaleja.** Tähän mennessä olemme löytäneet vain kourallisen martingaaleja eli tiedämme, että B_t on martingaali, $B_t^2 - t$ on martingaali sekä harjoitustehtävän $B_t^3 - 3tB_t$. Näillä kaikilla on yhdistävänä tekijänä se, että ne ovat muotoa $f(B_t, \langle B \rangle_t)$. Ensimmäisessä $f(x,y) = x$, toisessa $f(x,y) = x^2 - y$ ja kolmannessa $f(x,y) = x^3 - 3xy$. Yritämme seuraavaksi löytää muita martingaaleja, jotka ovat muotoa $f(B_t, \langle B \rangle_t)$.

Koska esimerkeissämme f oli C^∞-funktio, niin voimme suoraan aloittaa Itōn kaavasta. Asetamme $Z_t := f(B_t, \langle B \rangle_t) =: f(X_t^1, X_t^2)$. Koska X^1 on jatkuva martingaali, on se jatkuva semimartingaali. Koska $\langle B \rangle_t = t$ on lokaalisti rajoitetusti heilahteleva, on sekin jatkuva semimartingaali. Itōn kaavan toisen version mukaan saamme siten, että

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Z_t &= f_1(X_t)\,\mathrm{d}X_t^1 + f_2(X_t)\,\mathrm{d}X_t^2 + \tfrac{1}{2} f_{11}(X_t)\,\mathrm{d}\langle X^1 \rangle_t \\ &= f_1(X_t)\,\mathrm{d}B_t + f_2(X_t)\,\mathrm{d}\langle B \rangle_t + \tfrac{1}{2} f_{11}(X_t)\,\mathrm{d}\langle B \rangle_t \\ &= f_1(X_t)\,\mathrm{d}B_t + \Big(f_2(X_t) + \tfrac{1}{2} f_{11}(X_t)\Big)\,\mathrm{d}\langle B \rangle_t \end{aligned} \tag{6.1}$$

Voimmekin nyt kysyä, milloin Z_t on lokaali martingaali. Vastaus on nyt helppo, eli silloin kun lokaalisti rajoitetusti heilahteleva termi häviää, eli kun

$$\Big(f_2(X_t) + \tfrac{1}{2} f_{11}(X_t)\Big)\,\mathrm{d}t = 0$$

Tämä on yhtäpitävää (miksi? HT) sen kanssa, että

$$f_2(x,y) + \tfrac{1}{2} f_{11}(x,y) = 0 \tag{6.2}$$

6.3. **Esimerkki.** Aikaisemmat esimerkkimme toteuttavat yhtälön (6.2). Jos $f(x,y) = x$, niin $f_2(x,y) = 0$ ja $f_{11}(x,y) = 0$. Jos $f(x,y) = x^2 - y$, niin $f_2(x,y) = -1$ ja $f_{11}(x,y) = \partial_x \partial_x (x^2) = \partial_x (2x) = 2$, joten $f_2(x,y) + \frac{1}{2} f_{11}(x,y) = -1 + 1 = 0$.

Yritämme nyt löytää uuden martingaalin. Jos aloitamme yritteestä

$$f(x,y) = x^4$$

niin $\frac{1}{2} f_{11} = 6x^2$ mutta $f_2 = 0$. Voimme yrittää korjata yritettä, ja lisätä siihen termi g, jolle $g_2(x,y) = -6x^2$. Yksinkertaisin tämän differentiaaliyhtälön ratkaisuista on $-6x^2y$, joten teemme uuden yritteen

$$f(x,y) = x^4 - 6x^2 y$$

Nyt $f_2 = -6x^2$, mutta $\frac{1}{2} f_{11} = 6x^2 - 6y$, joten tämäkään ei toteuta yhtälöä (6.2). Korjaamme yritettä edelleen lisäämällä termi h jolle $h_2(x,y) = 6y$. Tämän yksinkertaisin ratkaisu on $h(x,y) = 3y^2$, joten teemme taas yritteen

$$f(x,y) = x^4 - 6x^2 y + 3y^2$$

Nyt $f_2(x,y) = -6x^2 + 6y$ ja $\frac{1}{2}f_11(x,y) = 6x^2 - 6y$, joten $\frac{1}{2}f_11 + f_2 = 0$. Siispä $B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$ on martingaali. Vastaavasti näemme, että

$$f(x,y) = x^5 - 10x^3y + 5xy^2 - \frac{5}{3}y^3$$

toteuttaa yhtälön (6.2), joten $3B_t^5 - 30tB_t^3 + 15t^2B_t - 5t^3$ on myös martingaali.

Näiden martingaalien sovelluksena voimme esimerkiksi määrätä joitakin momentteja poistumishetkelle $\tau = \inf\{\, t > 0 : \ |B_t| \geq r \,\}$.

6.4. **Esimerkki.** Olkoon $X_t^1 = B_t^2 - t$. Jos lähetämme Brownin liikkeen kulkemaan nollasta, niin martingaalin ominaisuuksien nojalla

$$\mathbf{E}_0\,(B_\tau^2 - \tau) \ = \mathbf{E}_0\, X_\tau^1 \ = \mathbf{E}_0\, X_0 \ = 0.$$

Koska $|B_\tau| = r$, niin $\mathbf{E}_0\, B_\tau^2 \ = r^2$. Siispä

$$\mathbf{E}_0\, \tau \ = r^2.$$

Jos sovellamme samaa päättelyä martingaaliin $X_t^2 = B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$, niin havaitsemme, että

$$\mathbf{E}_0\,(B_\tau^4 - 6\tau B_\tau^2 + 3\tau^2) \ = \mathbf{E}_0\, X_\tau^2 \ = \mathbf{E}_0\, X_0^2 \ = 0.$$

Voimme siten päätellä, että

$$r^4 - 6\mathbf{E}_0\, \tau\, r^2 + 3\mathbf{E}_0\, \tau^2 \ = r^4 - 6r^4 + 3\mathbf{E}_0\, \tau^2 \ = 0$$

joten

$$\mathbf{E}_0\, \tau^2 \ = \frac{5r^4}{3}$$

Havaitsemme tästä, että $\mathbf{V}\,\tau \ = 2r^4/3$, joten satunnaismuuttujan $\eta := \tau/r^2$ odotusarvo $\mathbf{E}_0\, \eta \ = 1$ ja varianssi $2/3$. Voimme siten ajatella, että pienillä r satunnaismuuttuja τ on tietyssä mielessä r^2.

Voimmeko löytää muitakin ratkaisuja yhtälölle (6.2) kuin polynomeja. Voisimme yrittää löytää ratkaisun, joka on muotoa $Z_t = g(X_t)h(\langle\, X\,\rangle_t)$. Tällöin funktion $f(x,y) = g(x)h(y)$ osittaisderivaatat ovat $f_2(x,y) = g(x)h'(y)$ ja $f_{11}(x,y) = g''(x)h(y)$, joten saamme yhtälön

$$g(x)h'(y) = -\tfrac{1}{2}g''(x)h(y) \Longrightarrow \frac{h'(y)}{h(y)} = -\frac{g''(x)}{2g(x)}$$

jos $g(x) \neq 0$ ja $h(y) \neq 0$. Koska vasen puoli on pelkästään muuttujan y funktio ja oikea pelkästään muuttujan x funktio, niin itse asiassa kumpikin puolista on *vakio.* Tämä siksi, että jos

$$a(x) = b(y)$$

kaikilla x ja y, niin $a(x) = b(0)$ on vakio ja $a(0) = b(y)$ on myös vakio. Olemme siis päätelleet, että

$$\frac{h'(y)}{h(y)} = -\lambda \quad \text{ja} \quad \frac{g''(x)}{2g(x)} = \lambda.$$

Nämä lineaariset yhtälöt on helppo ratkaista ja näemme, että

$$h(y) = Ce^{-\lambda y} \text{ ja } g(x) = c_1 e^{-\sqrt{2\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{2\lambda}x}.$$

Siispä $f(x,y) = c_1' e^{-\lambda y - \sqrt{2\lambda}x} + c_2' e^{-\lambda y + \sqrt{2\lambda}x}$. Jos merkitsemme $\theta := \sqrt{2\lambda}$ ja oletamme, että $c_1' = 0$ ja $c_2' = 1$, niin

$$f(B_t, t) = e^{\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t} =: X_\theta(t)$$

on jatkuva lokaali martingaali. Toisaalta tiedämme, että

$$\int_0^t \theta f(B_s, s)\,\mathrm{d}B_s$$

on aikaisempien tietojen nojalla martingaali, joten X_θ on itse asiassa martingaali.

Prosessia X_θ nimitetään usein *geometriseksi Brownin liikkeeksi* (tai joskus *eksponetiaaliseki Brownin liikkeeksi*).

6.5. **Esimerkki.** Olkoon τ edelleen poistumishetki väliltä $[-r, r]$. Olkoon $\tau_r = \inf\{\ t \geq 0 : \ B_t = r\ \}$. Tällöin $\tau \leq \tau_r$. Nyt sovellamme geometrista Brownin liikettä, jolloin

$$\mathbf{E}_0\, X_\theta(\tau_r) \ = \mathbf{E}_0\, X_0 \ = e^{\theta 0 - \frac{1}{2}\theta^2 0} = 1.$$

Koska

$$\mathbf{E}_0\, X_\theta(\tau_r) \ = \mathbf{E}_0\, \exp\Big(\theta B(\tau_r) - \tfrac{1}{2}\theta^2 \tau_r\Big) \ = e^{\theta r}\mathbf{E}_0\, \exp(-\tfrac{1}{2}\theta^2\tau_r)\,,$$

niin merkitsemällä $\lambda = \frac{1}{2}\theta^2$, eli $\theta = \sqrt{2\lambda}$, saamme

$$\mathbf{E}_0\, e^{-\lambda\tau_r} \ = e^{-r\sqrt{2\lambda}}$$

Haluaisimme laskea saman pysähdyshetkellä τ. Koska $\tau \leq \tau_r$, niin voimme käyttää vahvaa Markovin ominaisuutta, joten

$$\mathbf{E}\,\Big(e^{-\lambda\tau_r} \,|\, \mathscr{F}_\tau\Big) \ = e^{-\lambda\tau}\mathbf{E}_{B(\tau)}\, e^{-\lambda\tau_r}$$

Jos $B(\tau) = r$, niin $\tau_r = 0$, joten

$$[\, B(\tau) = r\,]\mathbf{E}_{B(\tau)}\, e^{-\lambda\tau_r} \ = [\, B(\tau) = r\,].$$

Jos taas $B(\tau) = -r$, niin käyttämällä hyväksi geometrista havaintoa (eli siirtämällä Brownin liikkeen alkamispistettä), voimme päätellä, että

$$\mathbf{E}_{-r}\, e^{-\lambda\tau_r} \ = \mathbf{E}_0\, e^{-\lambda\tau_{2r}} \ = e^{-2r\sqrt{2\lambda}}$$

Siispä

$$\begin{aligned}[\,B(\tau) = -r\,]\mathbf{E}_{B(\tau)}\, e^{-\lambda\tau_r} &= [\,B(\tau) = -r\,]\mathbf{E}_{-r}\, e^{-\lambda\tau_r} \\ &= [\,B(\tau) = -r\,]\mathbf{E}_0\, e^{-\lambda\tau_{2r}} = [\,B(\tau) = -r\,]e^{-2r\sqrt{2\lambda}}\end{aligned}$$

Kaiken kaikkiaan on siten voimassa

$$\mathbf{E}_0\, e^{-\lambda\tau_r} = \mathbf{E}_0\,[\,B_\tau = r\,]e^{-\lambda\tau} + e^{-2r\sqrt{2\lambda}}\mathbf{E}_0\,[\,B_\tau = -r\,]e^{-\lambda\tau}$$

Nyt

$$\mathbf{E}_0\,[\,B_\tau = -r\,]e^{-\lambda\tau} = \mathbf{E}_0\,[\,B_\tau = r\,]e^{-\lambda\tau}$$

sillä $X_t = -B_t$ on myös Brownin liike. Koska $[\,B_\tau = r\,] + [\,B_\tau = -r\,] = 1$, niin

$$\mathbf{E}_0\,[\,B_\tau = -r\,]e^{-\lambda\tau} = \tfrac{1}{2}\mathbf{E}_0\, e^{-\lambda\tau}\,.$$

Päättelemme siis, että

$$\mathbf{E}_0\, e^{-\lambda\tau_r} = \tfrac{1}{2}(1 + e^{-2r\sqrt{2\lambda}})\mathbf{E}_0\, e^{-\lambda\tau}\,,$$

mistä voimme siten ratkaista poistumishetken τ momenttigeneroivan funktion, eli

$$\mathbf{E}_0\, e^{-\lambda\tau} = \frac{2e^{-r\sqrt{2\lambda}}}{1 + e^{-2r\sqrt{2\lambda}}} = \frac{2}{e^{r\sqrt{2\lambda}} + e^{-r\sqrt{2\lambda}}} = \frac{1}{\cosh r\sqrt{2\lambda}} = \operatorname{sech} r\sqrt{2\lambda}.$$

Poistumishetken τ momenttigeneroiva funktio on siis *hyperbolinen sekantti* eli *hyperbolisen kosinin* resiprookkifunktio.

Taulokoista voimme nyt lukea [6], mikä on tämän erikoisfunktion potenssisarja. Näemme että

$$\mathbf{E}_0\, e^{-\lambda\tau} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n E_n}{(2n)!} 2^n r^{2n} \lambda^n = 1 - r^2\lambda + \frac{5}{6}r^4\lambda^2 - \frac{61}{90}r^6\lambda^3 + \dots$$

missä luvut E_{2n} ovat niin sanottuja *Eulerin lukuja*, jotka esiintyvät useissa kombinatorisissa ongelmissa. Tästä voimme lukea, että

$$\mathbf{E}_0\,\tau = r^2, \quad \mathbf{E}_0\,\tau^2 = \frac{5}{3}r^2, \quad \mathbf{E}_0\,\tau^3 = \frac{61}{15}r^4, \quad \mathbf{E}_0\,\tau^n = \frac{|E_n| n!}{(2n)!} 2^n r^{2n}$$

Mukavaksi harjoitustehtäväksi momenttigeneroivilla funktiolla laskemiseen voisi jättää sen osoittamisen, että Eulerin luvut toteuttavat lineaarisen rekursioyhtälön

$$1 = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-4)^r \binom{n}{2r} E_{n-r}$$

[6] tai nykyään Wikipediasta

Kun $n = 0$, niin $1 = E_0$. Kun $n = 1$, niin $1 = E_{1-0} = E_1$. Kun $n = 2$, niin $1 = E_2 - 4E_1 = E_2 - 4$, joten $E_2 = 5$. Edelleen, kun $n = 3$, niin $1 = E_3 - 4 \times 3E_2 = E_3 - 60$, joten $E_3 = 61$. Seuraava luku on siten

$$\begin{aligned} 1 &= E_4 - 4\binom{4}{2}E_3 + 16E_2 = E_4 - 24 \times 61 + 16 \times 5 = E_4 - 1464 + 80 \\ &= E_4 - 1384 \Longrightarrow E_4 = 1385 \end{aligned}$$

6.2. **Palautuvuus ja poistuvuus.** Voimme soveltaa edellisiä ajatuksia Brownin liikkeen kulun tarkasteluun. Haluamme selvittää, milloin Brownin liike on *palautuva* ja milloin *poistuva*.

Katsotaan ensin 1-ulotteista tilannetta ja olkoon τ poistumishetki väliltä (a, b). Koska Brownin liike on martingaali, niin jos $x \in (a, b)$, niin

$$\mathbf{E}_x B_\tau = a\mathbf{P}_x(B_\tau = a) + b\mathbf{P}_x(B_\tau = b) = \mathbf{E}_x B_0 = x$$

Koska $\mathbf{P}_x(B_\tau = a) + \mathbf{P}_x(B_\tau = b) = 1$, niin voimme ratkaista tästä, että

$$\mathbf{P}_x(B_\tau = a) = \frac{b-x}{b-a}, \quad \mathbf{P}_x(B_\tau = b) = \frac{x-a}{b-a}$$

Olkoon nyt $\eta_x = \inf t > 0 B_t = x$. Voimme olettaa, että $x > 0$, ja kysyä, millä todennäköisyydellä $\mathbf{P}_0(\eta_x < \infty)$ eli jos lähdemme nollasta, millä todennäköisyydellä saavumme pisteeseen x?

Soveltamalle edellä ollutta laskua väliin $(-Mx, x)$, voimme päätellä, että

$$\mathbf{P}_0(\eta_x < \infty) \geq \mathbf{P}_0(\eta_x < \eta_{-Mx}) = \mathbf{P}_0(B_\tau = x) = \frac{Mx}{x + Mx} = \frac{M}{M+1} \to 1$$

kun $M \to \infty$. Markovin ominaisuuden avulla voimme päätellä

$$\mathbf{P}_0(B(t) = x \text{ äärettömän monta kertaa}) = 1$$

joten sanomme, että 1-ulotteinen Brownin liike on *palautuva*.

Seuraavaksi voisi kysyä, miten ulottuvuus d vaikuttaa palautuvuuteen? Jos tarkennamme kysymystä siten, että kysymme:

i) törmääkö d-ulotteinen Brownin liike annettuun pisteeseen?
ii) törmääkö d-ulotteinen Brownin liike annettuun kuulaan?

Kun $d = 1$, niin vastaus on molempiin kysymyksiin myönteinen. Siirtämällä origoa voimme olettaa, että kohdassa *i*) piste on origo ja kohdassa *ii*) annettu kuula on origokeskinen. Koska nyt asetelma on rotaatioiden suhteen invarianttti ja Brownin liike on rotaatioinvariantti (HT), niin tehtävän voi palauttaa yksiulotteiseksi tarkastelemalla prosessia

$$X_t = |B_t|^2 = \sum_j (B_t^j)^2$$

Jos asetamme $\tau_r := \inf\{\, t > 0 : \; X_t = r \,\}$, niin ensimmäinen kysymys on siten

i) onko $\mathbf{P}_x(\tau_0 < \infty) = 1$?

ii) onko $\mathbf{P}_x(\,\tau_r < \infty\,) = 1$ kun $r > 0$?

Kuten 1-ulotteisessa tapauksessa, voimme tarkastella molempia kysymyksiä tarkastelemella kysymystä

$$p(x,r,R) := \mathbf{P}_x(\,\tau_r < \tau_R\,) =?$$

kun $r < |x| < R$. Kuinka voimme vastata tähän kysymykseen? Yksiulotteinen lasku antaa syyn yrittää seuraavaa. Olkoon $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jokin funktio ja $Z_t = \varphi(X_t)$. *Jos Z_t on martingaali* ja $\tau = \inf\{\, t > 0 :\ X_t \notin (r,R)\,\}$, niin

$$\mathbf{E}_x\, Z_\tau \ = \mathbf{E}_x\, Z_0\ = \varphi(x)$$

ja koska

$$\mathbf{E}_x\, Z_\tau \ = \varphi(r)\mathbf{P}_x(\,X_\tau = r\,) + \varphi(R)\mathbf{P}_x(\,X_\tau = R\,) = \varphi(R) + p(x,r,R)(\varphi(r) - \varphi(R)).$$

niin päättelemme, että

$$\mathbf{P}_x(\,\tau_r < \tau_R\,) = p(x,r,R) = \frac{\varphi(R) - \varphi(x)}{\varphi(R) - \varphi(x)} \tag{6.6}$$

Eli todennäköisyyden laskeminen palautui sellaisen funktion φ etsimiseen, mikä tekee prosessista Z_t martingaalin. Käytämme Itōn kaavaa, jolloin

$$\mathrm{d}Z_t = \varphi'(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \tfrac{1}{2}\varphi''(X_t)\,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_t.$$

Joudumme määräämään myös prosessin X_t differentiaalin, joka on

$$\mathrm{d}X_t = \sum_j 2B_t^j\,\mathrm{d}B_t^j + \sum_j \mathrm{d}t = \ \mathrm{d}M_t + n\,\mathrm{d}t$$

kun $d = n$. Siispä tämän avulla voimme määrätä, että $\langle\, X\,\rangle_t = \langle\, M\,\rangle_t$, joten

$$\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_t = \sum_{j,k} 4B_t^k B_t^j\,\mathrm{d}\langle\, B^k, B^j\,\rangle_t = \sum_j 4(B_t^j)^2\,\mathrm{d}t = 4X_t\,\mathrm{d}t$$

sillä Brownin liikkeen komponentit ovat riippumattomia, joten $\langle\, B^k, B^j\,\rangle = 0$ (HT). Käyttämällä liitännäisyyslakia, voimme siten kirjoittaa, että

$$\mathrm{d}Z_t = \ \mathrm{d}N_t + n\varphi'(X_t)\,\mathrm{d}t + 2\varphi''(X_t)X_t\,\mathrm{d}t.$$

Havaitsemme, että Z_t on ainakin lokaali martingaali, jos

$$n\varphi'(x) + 2\varphi''(x)x = 0 \Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{n}{2x} \Longrightarrow f(x) = Cx^{-n/2}$$

kun $f(x) := \varphi'(x)$. Jos valitsemme $C = 1$, niin integroimalla saamme ratkaistua funktion φ, joka siten toteuttaa

$$\varphi(x) = \begin{cases} \ln|x|, & d = n = 2, \\ C_n x^{(2-n)/2}, & d = n \geq 3, \end{cases}$$

Kun $0 < r < x < R < \infty$, niin funktio φ on rajoitettu, joten Z_t^τ on Brownin liikkeen stokastisena integraalina rajoitettu martingaali, joten kaava (6.6) on voimassa.

Kun $d = 2$, niin tiedämme siten, että

$$\mathbf{P}_x(\tau_r < \infty) \geq \mathbf{P}_x(\tau_r < \tau_R) = \frac{\ln R - \ln x}{\ln R - \ln r} \to 1$$

kun $R \uparrow \infty$, joten tasossa kohta *ii*) on voimassa eli Brownin liike törmää annettuun kiekkoon, oli se kuinka pieni ja kuinka kaukana tahansa. Kun $d \geq 3$, tilanne muuttuu ratkaisevasti. Tällöin $\alpha := \frac{2-d}{2} < 0$,

$$\mathbf{P}_x(\tau_r < \infty) = \lim_{R\to\infty} \mathbf{P}_x(\tau_r < \tau_R) = \lim_{R\to\infty} \frac{R^\alpha - x^\alpha}{R^\alpha - r^\alpha} = \frac{x^\alpha}{r^\alpha} < 1$$

kun $x > r$, joten Brownin liike ei palaudu kuulaan positiivisella todennäköisyydellä, oli kuula miten iso tahansa saatikka jos kuula olisi yksittäinen piste. Tässä mielessä Brownin liike on *poistuva* kun $d \geq 3$.

Tasossa $d = 2$ on kysymys *i*) vielä vastaamatta. Koska

$$\mathbf{P}_x(\tau_0 < \tau_R) \leq \mathbf{P}_x(\tau_r < \tau_R) = \frac{\ln R - \ln x}{\ln R - \ln r} \to 0$$

kun $r \downarrow 0$, niin $\mathbf{P}_x(\tau_0 < \tau_R) = 0$ jokaisella x ja jokaisella $R > |x|$. Koska Brownin liike on jatkuva, niin $\tau_R \uparrow \infty$, kun $R \uparrow \infty$, joten

$$\mathbf{P}_x(\tau_0 < \infty) = 0$$

jokaisella $x \neq 0$. Pienellä lisäpäättelyllä, voimme osoittaa, että myös $\mathbf{P}_0(\tau_0 < \infty) = 0$, joten kohta *i*) ei toteudu tasossa eli *Brownin liike ei palaa pisteisiin.*

6.3. **Dirichlet'n reuna-arvotehtävä.** Palaamme alun reuna-arvotehtävään eli palaamme kappaleen 2.3. kysymykseen. Eli haluamme määrätä, mitä on $u(x) = \mathbf{E}_x f(B_\tau)$, kun $G \subset \mathbb{R}^d$ on avoin ja yhtenäinen rajoitettu joukko, piste $x \in \overline{G}$, pysähdyshetki τ on ensimmäinen poistumishetki alueesta G ja $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio, missä $\Gamma = \partial G$.

Voimme nyt helposti viedä esittämämme laskut ja ajatukset läpi, eli aluksi määrittelemme $Z_t := w(B_t)$, kun w on jokin vapaasti valittu kahdesti jatkuvasti derivoituva funktio alueessa G ja jatkuva reunalle Γ saakka. Havaitsemme, että tämä prosessi on hyvin määritelty satunnaisella välillä $[0, \tau]$.

Oletamme aluksi, että $x \in G$. Tiedämme topologian kursseilta, että tällöin etäisyys reunalle on aidosti positiivinen. Koska Brownin liike on jatkuva, niin se ei voi ennättää reunalle välittömästi, joten $\tau > 0$. Siispä prosessi Z_t on hyvin määritelty myös puoliavoimella satunnaisella välillä $[0, \tau)$. Välillä $[0, \tau)$ Brownin liike on jatkuva lokaali martingaali, joten Itōn kaavan nojalla prosessi Z_t on jatkuva semimartingaali välillä $[0, \tau)$. Voimme lisäksi määrätä sen stokastisen differentiaalin,

$$\mathrm{d}Z_t = \sum_j w_j(B_t)\,\mathrm{d}B_t^j + \tfrac{1}{2}\sum_{j,k} w_{jk}(B_t)\,\mathrm{d}\langle\, B^j, B^k \,\rangle_t$$

Brownin liikkeen koordinaatit ovat riippumattomia, joten $\langle\, B^j, B^k \,\rangle_t = t[\, j = k\,]$. Siispä

$$\mathrm{d}Z_t = \sum_j w_j(B_t)\,\mathrm{d}B_t^j + \tfrac{1}{2}\sum_j w_{jj}(B_t)\,\mathrm{d}t =: \mathrm{d}M_t + \tfrac{1}{2}\triangle w(B_t)\,\mathrm{d}t =: \mathrm{d}M_t + \mathrm{d}A_t$$

Ensimmäinen termi on jatkuva lokaali martingaali satunnaisella välillä $[0, \tau)$ ja jälkimmäinen on jatkuva lokaalisti rajoitetusti heilahteleva prosessi. Tästä voimme päätellä monta asiaa.

6.7. **Lemma.** *Prosessi Z on jatkuva lokaali martingaali välillä $[0, \tau)$ kaikilla lähtöpisteillä $x \in G$ jos ja vain jos $\triangle w = 0$ alueessa G.*

Todistus. Havaitsemmekin välittömästi, että jos $\triangle w = 0$ alueessa G, niin Z on jatkuva lokaali martingaali välillä $[0, \tau)$ lähdimme liikkeelle mistä tahansa pisteestä $x \in G$. Jos *oletamme*, että Z on jatkuva lokaali martingaali kun lähdemme liikkeellä vapaasti valitusta pisteestä $x \in G$, niin myös $A_t = Z_t - M_t$ on jatkuva lokaali martingaali. Toisaalta, se on myös rajoitetusti heilahteleva, joten tällöin $A_t = 0$. Siispä myös kaikilla pysähdyshetkillä $\eta < \tau$ on voimassa $A_\eta = 0$. Tästä seuraakin, että $\triangle w = 0$. Oletetaankin, että $\triangle w(x) > 0$. Koska $\triangle w$ on jatkuva, niin löydämme sellaisen luvun $r > 0$ ja sellaisen pienen ympäristön $U \ni x$, että $\triangle w(y) \geq r$ jokaisella $y \in U$. Jos η on poistumishetki joukosta U, niin Brownin liikkeen jatkuvuuden nojalla $\eta > 0$. Siispä

$$A_\eta = \int_0^\eta \triangle w(B_s)\,\mathrm{d}s \geq \eta r$$

kun lähdemme liikkeelle pisteestä $x \in U$. Siispä oletuksesta $\triangle w \neq 0$ seuraa, että $A_\eta \neq 0$ jollakin pysähdyshetkellä $\eta < \tau$, joten oletuksesta Z on jatkuva lokaali martingaali seuraa, että $\triangle w = 0$. □

Jos siis $\triangle w = 0$ alueessa G, niin Z on jatkuva lokaali martingaali välillä $[0, \tau)$. Löydämme siten kasvavan jonon (τ_n) pysähdyshetkiä, joille $\tau_n \uparrow \tau$ sekä Z^{τ_n} on tasaisesti integroituva martingaali. Optionaalisen pysäyttämisen lauseen nojalla $\mathbf{E}_x\, Z_0^{\tau_n} = \mathbf{E}_x\, Z^{\tau_n}(\tau)$, joten $w(x) = \mathbf{E}_x\, Z_0^{\tau_n} = \mathbf{E}_x\, Z(\tau_n)$ jokaisella n. Koska Brownin liike on jatkuva ja $\tau_n \uparrow \tau < \infty$ ja w oli oletuksen mukaan jatkuva reunalle asti, voimme päätellä, että $w(x) = \mathbf{E}_x\, w\,(B_\tau)$. Jos siis $w = f$ alueen G reunalla Γ, niin $u(x) = w(x)$.

Olemme siten päätelleet, että

6.8. **Lemma.** *Jos reuna-arvotehtävällä*

$$\begin{cases} \triangle w = 0 & \textit{alueessa } G \\ w = f & \textit{reunalla } \Gamma \end{cases}$$

on ratkaisu, joka on C^2 *alueessa* G *ja jatkuva sulkeumaan* $\overline{G}$, *niin* $w(x) = \mathbf{E}_x\, f(B_\tau)$.

Osoitamme seuraavaksi, että reuna-arvotehtävällä on tällainen ratkaisu tai paremmin, näytämme suoraan, että u toteuttaa reuna-arvotehtävän ja on säännöllinen. Näytämme aluksi, että $u \in C^2(G)$ ja että $X_t := u(B_t)$ on jatkuva lokaali martingaali. Tällöin tiedämmekin Lemman 6.7 nojalla, että $\triangle u = 0$ alueessa G.

Olkoon $x \in G$ valittu. Olkoon $r > 0$ sellainen, että $S_r(x) \subset G$ ja määritellään η_r poistumishetkenä tästä r-säteisestä kuulasta. Koska B on vahva Markovin prosessi, niin

$$u(x) = \mathbf{E}_x\, f(B_\tau) \ = \mathbf{E}_x\, \mathbf{E}\, \Big(f(B_\tau) \,|\, \widehat{\mathscr{H}_\eta} \Big) \ = \mathbf{E}_x\, \mathbf{E}_{B(\eta)}\, f(B_\tau) \ = \mathbf{E}_x\, u(B_\eta)$$

(yksityiskohtien ja merkintöjen tarkka miettiminen on HT). Jätämme myös harjoitustehtäväksi miettiä, että u on ainakin mitallinen ja rajoitettu funktio, sekä

$$\mathbf{E}_x\, u(B_\eta) \ = \int u(y)\mu(r,\, \mathrm{d}y)$$

missä $A \mapsto \mu(r, A)$ on normeerattu pintamitta pallolla $S_r(x)$. Olkoon $\varphi \in C^\infty(-r, r)$ jokin positiivinen funktio ja oletetaan, että sen kantaja on välillä $(-r^2/2, r^2/2)$. Tällöin

$$u(x) \int_0^r \varphi(t^2)\, \mathrm{d}t = \int_0^r \, \mathrm{d}t \int \mu(t,\, \mathrm{d}y)\varphi(t^2)u(y) = \int_{|x-y|\le r} u(y)\varphi(|y-x|^2)\, \mathrm{d}y$$

missä käytimme Fubinin lausetta näppärästi hyväksi. Siispä

$$u(x) = \int u(y)\psi(x)(y)\, \mathrm{d}y$$

kun $\psi(x)(y) = [\, |x-y| \le r\,]\varphi(|x-y|^2) = \varphi(|x-y|^2)$. Voimme siten laskea, että

$$u_j(x) = \int u(y)\psi_j(x)(y)\, \mathrm{d}y$$

ja yleisesti

$$u_\alpha(x) = \int u(y)\psi_\alpha(x)(y)\, \mathrm{d}y$$

Siispä u on äärettömän monta kertaa derivoituva pisteessä x ja tästä päättelemme, että $u \in C^\infty(G)$.

Nyt päättelemme martingaaliominaisuuden. Olkoon τ_n jono, jolle $\tau_n \uparrow \tau$ ja B^{τ_n} on tasaisesti integroituva martingaali. Koska u on rajoitettu, niin $u(B_t^{\tau_n})$ on integroituva. Koska B on vahva Markovin prosessi, niin

$$[\, s < \tau \,]\mathbf{E}\left(f(B_\tau) \,|\, \widehat{\mathscr{H}_s}\right) = [\, s < \tau \,]\mathbf{E}_{B(s)}\, f(B_\tau) = [\, s < \tau \,]u(B_s).$$

Siispä välillä $[0, \tau)$ vasemman puolen prosessi on lokaali martingaali, joten myös oikean puolen prosessi on lokaali martingaali. Siten $Z_t = u(B_t)$ on lokaali martingaali satunnaisella välillä $[0, \tau)$, joten $\triangle u = 0$ alueessa G.

Haluamme vielä osoittaa, että funktio u on jatkuva reunalle asti eli haluamme näyttää, että jos $x \in \Gamma$ ja $(x_n) \subset G$ on jono, niin $u(x_n) \to u(x)$ jos $x_n \to x$.

Olkoon $x \in \Gamma$ ja $(x_n) \subset G$ jokin jono, jolle $x_n \to x$. Koska

$$u(z) = \mathbf{E}_z\, f(B_\tau) = \mathbf{E}_z\, f(B_\tau)[\, B_\tau \in D(x,\delta) \,] + \mathbf{E}_z\, f(B_\tau)[\, B_\tau \notin D(x,\delta) \,]$$

jokaisella $z \in \overline{G}$ ja $\delta > 0$, niin jos δ on hyvin pieni, niin funktion f jatkuvuuden nojalla

$$u(z) = f(x)\mathbf{P}_z\,(\, B_\tau \in D(x,\delta) \,) + \mathbf{E}_z\, f(B_\tau)[\, B_\tau \notin D(x,\delta) \,] + \mathrm{o}(1),$$

kun $\delta \to 0$. Jos $\mathbf{P}_{x_n}\,(\, B_\tau \in D(x,\delta) \,) \to 1$, kun $x_n \to x$, niin

$$u(x_n) = f(x) + \mathrm{o}(1),$$

sillä

$$|\mathbf{E}_z\, f(B_\tau)[\, B_\tau \notin D(x,\delta) \,]\,| \leq \|\, f \,\|_\infty \mathbf{P}\,(\, B_\tau \notin D(x,\delta) \,) \to 0.$$

Siispä voimme päätellä, että jos $\mathbf{P}_x\,(\, \tau = 0 \,) = 1$, niin $u(x) = f(x)$, joten

$$\lim_{n\to\infty} u(x_n) = u(x) + \psi(\delta).$$

Antamalla $\delta \to 0$ jatkuvuus seuraisi. Osoitammekin, että

6.9. **Lemma.** *Jos $x \in \Gamma$ on sellainen, että $\mathbf{P}_x\,(\, \tau = 0 \,) = 1$, niin $u(x_n) \to u(x)$ jokaisella jonolla $(x_n) \subset G$, jolle $x_n \to x$.*

Todistus. Meidän on edellisen perusteella osoitettava, että jokaisella $\delta > 0$ on voimassa $\mathbf{P}_{x_n}\,(\, B_\tau \in D(x,\delta) \,) \to 1$, kun $n \to \infty$. Nyt

$$\mathbf{P}_{x_n}\,(\, B_\tau \in D(x,\delta) \,) = \mathbf{P}_{x_n}\,(\, \tau > t, B_\tau \in D(x,\delta) \,) + \mathbf{P}_{x_n}\,(\, \tau \leq t, B_\tau \in D(x,\delta) \,)\,.$$

jokaisella $t > 0$. Intuitiivisesti on selvää, että $\mathbf{P}_{x_n}\,(\, \tau > t \,) \to 0$, kun $n \to \infty$, mutta väite on vielä osoitettava. Jos tiedämme tämän, niin ensimmäinen termi häviää, kun $n \to \infty$. Siis

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{x_n}\,(\, B_\tau \in D(x,\delta) \,) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{x_n}\,(\, \tau \leq t, B_\tau \in D(x,\delta) \,)$$

jokaisella $t > 0$. Voimme edelleen kirjoittaa, että

$$\mathbf{P}_{x_n}\,(\, \tau \leq t, B_\tau \in D(x,\delta) \,) = \mathbf{P}_{x_n}\,(\, \tau \leq t \,) - \mathbf{P}_{x_n}\,(\, \tau \leq t, B_\tau \notin D(x,\delta) \,)$$

joten olettamamme intuitiivisen väitteen nojalla $\mathbf{P}_{x_n}(\,\tau \le t\,) \to 1$ jokaisella $t > 0$. Väite on siten muokattu muotoon

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{x_n}(\,B_\tau \in D(x,\delta)\,) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{x_n}(\,\tau \le t, B_\tau \notin D(x,\delta)\,)$$

jokaisella $t > 0$. Jos nyt annamme $t \to 0$, niin näyttäisi uskottavalta, että voisimme ehkä hävittää viimeisenkin häiriötermin. Jos valitsemme t niin pieneksi, että

$$\mathbf{P}_0\left(\sup_{0\le s<t} |B_s| > \delta/2\right) = 1 - \mathbf{P}_0(\,\eta \le t\,) < \varepsilon$$

kun η on poistumishetki $\delta/2$-säteisestä kuulasta, niin

$$\mathbf{P}_{x_n}(\,\tau \le t, B_\tau \notin D(x,\delta)\,) \le \mathbf{P}_{x_n}\left(\sup_{0\le s<t} |B_s - x_n| > \delta/2\right) < \varepsilon$$

kunhan x_n on riittävän lähellä pistettä x. Siispä

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{x_n}(\,B_\tau \in D(x,\delta)\,) \ge 1 - \varepsilon$$

jokaisella $\varepsilon > 0$, jos $\mathbf{P}_{x_n}(\,\tau \le t\,) \to 1$. Antamalla $\varepsilon \to 0$ väite seuraa, kunhan $\mathbf{P}_{x_n}(\,\tau \le t\,) \to 1$ osoitetaan. Tämän todistaminen jää harjoitustehtäväksi (HT). □

Edellisessä lemmassa esiintyntyneen ehdon $\mathbf{P}_x(\,\tau = 0\,) = 1$ toteuttavaa reunan Γ pistettä nimitetään *säännölliseksi*. Olemme siten osoittaneet seuraavaa.

6.10. **Lause.** *Jos jokainen $x \in \Gamma$ on säännöllinen, niin $u(x) = \mathbf{E}_x\, f(B_\tau)$ on Dirichlet'n ongelman ratkaisu, joka on C^2 alueessa G ja jatkuva reunalle.*

Millaiset pisteet ovat säännöllisiä? Voimme helposti havaita, että jos reuna on osa jotain puolitasoa, niin tällaiset pisteet ainakin ovat säännöllisiä (HT). Jos piste $x \in \Gamma$ ei ole säännöllinen, niin määritelmän mukaan $\mathbf{P}_x(\,\tau = 0\,) < 1$. Mutta tapahtuma $\{\tau = 0\} \in \widehat{\mathscr{H}_0}$ ja kaikki tämän σ-algebran tapahtumat ovat joko melkein varmoja tai mahdottomia.

6.11. **Lause** (Blumenthalin 0-1 -laki)**.** *Jos $A \in \widehat{\mathscr{H}_0}$, niin $\mathbf{P}(\,A\,) = 0$ tai $\mathbf{P}(\,A\,) = 1$.*

Siispä piste, joka ei ole säännöllinen toteuttaakin $\mathbf{P}_x(\,\tau = 0\,) = 0$. Siis epäsäännöllisten pisteiden tulee olla lähes sisäpisteiden täysin ympäröimä.

6.12. **Esimerkki.** Jos $G = D(\bar{0},1) \setminus \{\bar{0}\} \subset \mathbb{R}^2$ on tason punkteerattu avoin kiekko, niin piste $\bar{0}$ ei ole säännöllinen. Tämä seuraa siitä, että Brownin liike ei palaa tasossa pisteisiinsä eli itse asiassa $\mathbf{P}_{\bar{0}}(\,\eta = \infty\,) = 1$, kun η on osumishetki pisteeseen $\bar{0}$ (HT).

Riittäviä ehtoja pisteen säännöllisyydelle on helppo löytää. Ensimmäinen on *kartioehto.*

6.13. **Määritelmä.** Piste $x \in \Gamma$ toteuttaa *kartioehdon*, jos löytyy sellainen palloympäristä $U \ni x$ ja kartio V, jonka kärkipiste on x ja joille $U \cap V \subset \overline{G}^C$.

6.14. **Esimerkki.** Jos reunan pisteeseen $x \in \Gamma$ voi liittää tangenttiavaruuden, niin x toteuttaa kartioehdon. Jos reuna voidaan pisteen x ympäristössä esittää Lipschitzin funktion kuvaajana, toteuttaa se myös kartioehdon.

6.15. **Lemma.** *Jos $x \in \Gamma$ toteuttaa kartioehdon, on x säännöllinen.*

Todistus. Jos lähetämme Brownin liikkeen pisteestä $x \in U$ ja η on osumishetki kartioon V, niin $\tau \leq \eta$ melkein varmasti. Olkoon $t > 0$ vapaasti valittu. Tällöin $\mathbf{P}\,(\,B(t) \in V\,) > 0$. Itse asiassa, koska $B(t) - B(0) \sim t^{1/2}(B(1) - B(0))$, niin $\mathbf{P}\,(\,B(t) \in V\,) = \mathbf{P}_x\left(t^{1/2}B(1) \in V\right) = \mathbf{P}_x\,(\,B(1) \in V\,) > 0$. Tämä johtuu siitä, että $t^{-1/2}V = V$ kartion määritelmän nojalla. Siispä $\mathbf{P}\,(\,B(t) \in V\,) = C > 0$ vakiolla C joka ei riipu ajanhetkestä t. Jos $B(t) \in V$, niin Brownin liikkeen jatkuvuuden nojalla $\tau \leq \eta \leq t$. Siispä

$$C = \mathbf{P}_x\,(\,B(t) \in V\,) \leq \mathbf{P}_x\,(\,\tau \leq t\,)$$

jokaisella $t > 0$. Koska $\{\tau \leq t\} \subset \{\tau \leq s\}$ aina, kun $t \leq s$, niin monotonisen suppenemisen lauseen nojalla

$$0 < C \leq \mathbf{P}_x\,(\,\tau = 0\,).$$

Koska $\mathbf{P}_x\,(\,\tau = 0\,) > 0$, niin Blumenthalin 0-1 -lain nojalla $\mathbf{P}_x\,(\,\tau = 0\,) = 1$, joten x on säännöllinen piste. $\square$