5.5. **Stokastiset differentiaalit ja liitännäisyys.** Olemme nyt rakentaneet stokastisen integroimisteorian ja tarkastelemme muutamaa tärkeää perusominaisuutta ennenkuin ryhdymme soveltamaan tietoja mielenkiintoisiin sovelluskohteisiin. Usein integraali on laskujen kannalta hyödyllistä ilmoittaa muodollisesti pelkkien differentiaalien avulla. Määrittelemämme stokastinen integraali

$$Y(t) = \int_0^t H(s)\,\mathrm{d}X(s)$$

voitaisiin muodollisesti kirjoittaa *stokastisten differentiaalien* $\mathrm{d}Y_t$ ja $\mathrm{d}X_t$ avulla seuraavasti:

$$\mathrm{d}Y_t = H(t)\,\mathrm{d}X_t$$

Nämä ovat luonnollisesti varsin fiktiivisiä[5] käsitteitä, mutta niiden avulla monet laskut ovat helppoja ja ne toimivat myös mukavina muistisääntöinä. Lisäksi ne nopeuttavat kirjoittamista, mikä on hyvin oleellista. Niiden avulla voisimme "päätellä" myös seuraavaa. Jos H ja K ovat ennustettavia ja integroituvia prosesseja ja $Y = K \cdot X$, $Z = (HK) \cdot X$ sekä X ovat jatkuvia lokaaleja martingaaleja, niin

$$\mathrm{d}Y_t = K(t)\,\mathrm{d}X_t, \quad \text{ja} \quad \mathrm{d}Z_t = H(t)K(t)\,\mathrm{d}X_t,$$

joten $\mathrm{d}Z_t = H(t)\,\mathrm{d}Y_t$, joten

$$Z_t = \int_0^t H(s)\,\mathrm{d}Y_s = (H \cdot (K \cdot X))_t = ((HK) \cdot X)_t$$

Näemme siis, että tulomerkintä integraalille toteuttaa liitännäisyyslain $H \cdot (K \cdot X) = (HK) \cdot X$. Valitettavasti tämä argumentti on hieman löysähkö, sillä niin kauan kuin differentiaalit ovat fiktiivisiä, ei niillä laskemalla saaduista tuloksista voi päätellä kovinkaan paljoa. Mutta voimme osoittaa tämän liitännäisyyden tarkastikin.

5.36. **Lemma.** *Jos X on jatkuva lokaali martingaali, $K \in \Pi_3(X)$ ja $H \in \Pi_3(K \cdot X)$, niin*

$$HK \cdot X = H \cdot (K \cdot X) =: H \cdot Y.$$

Differentiaalimuodossa ilmaistuna

$$H(t)K(t)\,\mathrm{d}X_t = H(t)\,\mathrm{d}Y_t, \ \textit{kun}\ \mathrm{d}Y_t = K(t)\,\mathrm{d}X_t.$$

Todistus. Osoitus on jälleen joko yleistäminen elementaarisista prosesseista yleisimpiin integroitaviin prosesseihin tai vastaavasti reduktio yleisimmästä elementaarisimpiin. Jätämme yksinkertaiset kohdat harjoitustehtäväksi, eli väitteen osoittaminen jos $H, K \in b\Pi_1$ on (HT).

[5]stokastisille differentiaaleille olisi mahdollista antaa myös tarkka tulkinta, mutta se jää kurssin ulkopuolelle

Jos olemme osoittaneet jo, että väite pitää paikkaansa, kun $K \in \Pi_2(X)$ ja $H \in \Pi_2(Y)$, niin pysättämällä kellot hetkellä

$$\tau_n = \inf\{\, t > 0 : \int_0^t K_s^2 \,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_s \vee \int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle\, Y\,\rangle_s > n \,\}$$

palauttaa lauseen alkuperäisen väitteen tähän tilanteeseen.

Kun $H \in b\Pi_1$ ja $K \in \Pi_2(X)$, niin voimme approksimoida prosessia K jonolla (K_n). Koska H on rajoitettu, niin $\|\, HK\,\|_X \le \|\, H\,\|_\infty \|\, K\,\|_X$ eli $HK \in \Pi_2(X)$. Edelleen

$$\|\, H(K_n - K)\,\|_X \le \|\, H\,\|_\infty \|\, K_n - K\,\|_X \to 0,$$

joten isometrian nojalla $HK_n \cdot X \to HK \cdot X$ avaruudessa $\mathscr{M}^2$. Toisaalta $HK_n \cdot X = H \cdot (K_n \cdot X) =: H \cdot Y_n$ ja koska

$$\|\, H \cdot (Y - Y_n)\,\|_{\mathscr{M}^2}^2 = \mathbf{E} \int_0^t H(s)^2 \,\mathrm{d}\langle\, Y - Y_n\,\rangle_s \le \|\, H\,\|_\infty^2 \mathbf{E}\,\langle\, Y - Y_n\,\rangle_t \,.$$

Lauseen 5.34 nojalla

$$\langle\, Y - Y_n\,\rangle_t = \int_0^t (K - K_n)^2(s) \,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_s$$

melkein varmasti, joten

$$\|\, H \cdot (Y - Y_n)\,\|_{\mathscr{M}^2}^2 \le \|\, H\,\|_\infty \|\, K - K_n\,\|_X^2 \to 0.$$

Raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $HK \cdot X = H \cdot Y$ avaruudessa $\mathscr{M}^2$ kuten halusimmekin.

Kun $H \in \Pi_2(Y)$ ja $K \in \Pi_2(X)$, niin voimme approksimoida prosessia H jonolla (H_n). Vastaavasti kuin aiemmin,

$$\|\, (H - H_n) \cdot Y\,\| = \|\, H - H_n\,\|_Y \to 0$$

joten $H \cdot Y = \lim H_n \cdot Y$ avaruudessa $\mathscr{M}^2$. Nyt vasen puoli $H_n K \cdot X$ lähestyy myös $HK \cdot X$:ää, sillä

$$\|\, (H - H_n)K \cdot X\,\|^2 = \mathbf{E} \int (H(s) - H_n(s))^2 K(s)^2 \,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_s$$

Koska Lauseen 5.34 nojalla

$$\mathbf{E} \int L(s) \,\mathrm{d}\langle\, Y\,\rangle_s = \mathbf{E} \int L(s) K(s)^2 \,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_s$$

jokaisella positiivisella mitallisella prosessilla L (HT, miksi?), niin

$$\|\, (H - H_n)K \cdot X\,\|^2 = \mathbf{E} \int (H(s) - H_n(s))^2 \,\mathrm{d}\langle\, Y\,\rangle_s = \|\, H - H_n\,\|_Y^2 \to 0$$

$\square$

5.6. **Itōn kaava eli muuttujan vaihto stokastisessa integraalissa.** Luvun 2 esimerkissä halusimme määrätä, mitä on

$$\mathbf{E}_x \int_0^\tau \mathrm{d}Z(s)$$

kun $Z(s) = w(B(s))$. Päädyimme approksimoimalla heuristisesti Brownin liikettä satunnaiskululla tarkastelemaan summaa prosessin Z lisäyksistä, joten muodollisesti jos korvaamme differenssit differentiaaleilla ja summan integraaleilla päädyimme esitykseen

$$\mathbf{E}_x\left(Z_\tau - Z_0\right) = \mathbf{E}_x\Big(\int_0^\tau Dw(B(s))\cdot \mathrm{d}B(s) + \tfrac{1}{2}\int_0^\tau \triangle w(B(s))\,\mathrm{d}s\Big)$$

Suoritimme siis (muodollisesti) muuttujan B vaihdon muuttujaksi Z. Tunnemme analyysistä muuttujan vaihtokaavan, joka seuraa ketjusäännöstä, jonka mukaan

$$f(g(x)) - f(g(0)) = \int_0^x f'(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f'(g(t))\,\mathrm{d}g(t)$$

Tämä kaava on voimassa, jos funktio g on lokaalisti rajoitetusti heilahteleva ja f jatkuvasti derivoituva. Differentiaalinotaatiolla tämä on

$$\mathrm{d}h(x) = f'(g(x))\,\mathrm{d}g(t)$$

kun $h = f\circ g$. Osoitamme tämän yleistyksen Brownin liikkeen tai yleisemmin jatkuvan semimartingaalin suhteen. Tulemme näyttämään, että differentiaalinotaatiolla

$$\mathrm{d}Z_t = f'(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \tfrac{1}{2}f''(X_t)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t$$

kun $Z_t = f(X_t)$ yhdessä ulottuvuudessa ja lisäksi tämän useampiulotteiset yleistykset. Jos tätä vertaa aikaisempaan muuttujanvaihtokaavaan havaitsemme, että mukaan on hiipinyt varianssiprosessin antama lisätermi. Tästä syystä kaava ei ole enää voimassa jokaiselle jatkuvasti derivoituvalle funktiolle f vaan tarvitsemme toisen jatkuvan derivaatan myös.

Jotta näkisimme yleistyksen useampiulotteiseen tilanteeseen, käytämme havaintoa, että $\langle X\rangle_t = \langle X, X\rangle_t$. Jos siis $X_t = (X^j)_t$ ja ulottuvuuksia d on yksi ja $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ on kahdesti jatkuvasti derivoituva, niin

$$\mathrm{d}Z_t = \partial_1 f(X_t)\,\mathrm{d}X_t^1 + \tfrac{1}{2}\partial_1\partial_1 f(X_t)\,\mathrm{d}\langle X^1, X^1\rangle_t$$

joten luenteva yleistys olisi

$$\mathrm{d}Z_t = \sum_j \partial_j f(X_t)\,\mathrm{d}X_t^j + \tfrac{1}{2}\sum_{j,k}\partial_j\partial_k f(X_t)\,\mathrm{d}\langle X^j, X^k\rangle_t. \tag{5.37}$$

Olemme osoittaneet kaksi tärkeää erikoistapausta kaavasta (5.37). Kun $d = 1$ ja $f(x) = x^2$ tai tämän yleistyksen, kun $d = 2$ ja $f(x,y) = xy$. Ensimmäinen tapaus, kun $d = 1$ ja $f = x^2$ sanoo, että $f'(x) = 2x$ ja $\frac{1}{2}f'' = 1$, joten kaava (5.37) väittää, että

$$\mathrm{d}(X^2)_t = 2X_t\,\mathrm{d}X_t + \mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_t \tag{5.38}$$

jonka tiedämme ainakin Brownin liikkeelle. Muillekin jatkuville lokaaleille martingaaleille tiedämme ainakin, että $(X^2)_t - \langle\, X\,\rangle_t$ on jatkuva lokaali martingaali eli ainakin väite on yhteensopiva tämän kanssa. Vastaavasti tulkittuna jälkimmäisen erikoistapauksen väite

$$\mathrm{d}(XY)_t = X_t\,\mathrm{d}Y_t + Y_t\,\mathrm{d}X_t + \mathrm{d}\langle\, X, Y\,\rangle_t$$

näyttää uskottavalta. Tämä tosin palautuu tapaukseen $d = 1$ ja $f(x) = x^2$, sillä jos tiedämme, että kaava (5.38) on voimassa kaikilla jatkuville lokaaleille martingaaleille, niin

$$\mathrm{d}(X \pm Y)_t^2 = 2(X_t \pm Y_t)\,\mathrm{d}(X \pm Y)_t + \mathrm{d}\langle\, X \pm Y, X \pm Y\,\rangle_t.$$

Siispä vähentämällä nämä identiteetit keskenään ja jakamalla luvulla 4, näemme, että

$$\mathrm{d}(XY)_t = \frac{1}{4}\Big(4(X_t\,\mathrm{d}Y_t + Y_t\,\mathrm{d}X_t) + 4\,\mathrm{d}\langle\, X, Y\,\rangle_t\Big)$$

Tämä *polarisointitekniikka* on funktionaalianalyysistä ja varsinkin sisätuloavaruuksista tuttu tärkeä temppu (ja olemme käyttäneet sitä jo kahdesti). Muotoilemme tämän tärkeän erikoistapauksen lauseena.

5.39. **Lause** (Osittaisintegrointikaava)**.** *Jos X ja Y ovat kaksi jatkuvaa semimartingaalia, niin*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s\,\mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s + \langle\, X, Y\,\rangle_t$$

melkein varmasti eli differentiaalimuodossa

$$\mathrm{d}(XY)_t = X_t\,\mathrm{d}Y_t + Y_t\,\mathrm{d}X_t + \mathrm{d}\langle\, X, Y\,\rangle_t$$

5.40. *Huomautus.* Ennenkuin aloitamme lauseen todistuksen, huomautamme lukijaa, että nykytiedoillamme osittaisintegrointikaava on vielä määrittelemätön. Koska jatkuvat lokaalisti rajoitetusti heilahtelevat ennustettavat prosessit A_1 ja A_2 ovat semimartingaaleja, niin väite koskee myös tällaisia prosessaja. Kuitenkaan emme ole määritelleet, mitä on $\langle\, A_1, A_2\,\rangle$ tässä tapauksessa. Myös käsite $\langle\, A_1, M\,\rangle$, kun M on jatkuva lokaali martingaali, on vielä määrittelemätön.

Laskimme kovarianssiprosessin polarisoimalla varianssiprosessita, jonka konstruoimme lisäysten neliöiden summan raja-arvona. Voisimme polarisoida tämän tuloksen ja määritellä jatkuvien lokaalien martingaalien X ja Y kovarianssiprosessin suoraan tulojen $(\nabla_+X)(\nabla_+Y)(t_k)$ summan raja-arvona. Tämä määritelmä on luonnollisesti mielekäs ilman martingaalioletusta. Suorittamalla nämä laskut prosesseille A_1 ja A_2 sekä prosessille A_1 ja M päädymme helposti seuraavaan määritelmään.

5.41. **Määritelmä.** Olkoon X ja Y jatkuvia semimartingaaleja. Prosessien X ja Y *kärkisulkuprosessi* $\langle X, Y \rangle$ on niiden martingaaliosien kovarianssiprosessi. Tarkemmin, jos $X = M + A_1$ ja $Y = M_2 + A_2$ ovat prosessien yksikäsitteiset määrittelevät esitykset, niin

$$\langle X, Y \rangle_t := \langle M, N \rangle_t$$

jokaisella $t \in T$.

Tämä määritelmä on myös helppo muistaa laskukaavojen $\langle A_1, A_2 \rangle = \langle A_1, M \rangle = 0$ kautta. Tämä toisaalta on tarkalleen tuon raja-arvotarkastelun antama tulkinta kärkisuluille.

Todistus. Tiedämme, että riittää näyttää, että

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s \,\mathrm{d}X_s + \langle X \rangle_t.$$

Oletamme aluksi, että X on jatkuva ja rajoitettu martingaali. Tiedämme, että

$$\langle X \rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_k (\nabla_+ X(t_{k,n}))^2 = \lim_{n\to\infty} \langle X_n \rangle(t)$$

avaruudessa L^2, kun jaamme välin $[0, t]$ dyadisesti. Tässä prosessi X_n on yksinkertainen ennustettava prosessi

$$X_n(t) = \sum_k X(t_{k,n})[\, t_{k,n} < t \le t_{k+1,n} \,]$$

Pidetään lukua n kiinteänä hetken verran ja olkoon $t = t_{N,n}$. Abelin summauksella tiedämme, että

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} (\nabla_+ X(t_k))^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} X(t_{k+1})(\nabla_+ X(t_k)) - \sum_{k=0}^{N-1} X(t_k)(\nabla_+ X(t_k)) \\
&= X(t_N)X(t_N) - X(t_1)X(0) - \sum_{k=1}^{N-1} X(t_k)(\nabla_- X(t_{k+1})) \\
&\qquad - \sum_{k=0}^{N-1} X(t_k)(\nabla_+ X(t_k)) \\
&= X(t_N)X(t_N) - X(0)X(0) - 2\sum_{k=0}^{N-1} X(t_k)(\nabla_+ X(t_k)) \\
&= X(t)^2 - X(0)^2 - 2\int_0^t X_n(s)\,\mathrm{d}X(s)
\end{aligned}$$

Olemme siten nähneet, että

$$\langle X \rangle_t = X(t)^2 - X(0)^2 - 2 \lim_{n\to\infty} \int_0^t X_n(s)\,\mathrm{d}X(s)$$

avaruudessa L^2, joten jos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\int_0^t |X - X_n|(s)\,\mathrm{d}X(s)\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left((X - X_n)\cdot X\right)_t^2 = 0$$

väite seuraa jatkuville ja rajoitetuille martingaaleille. Koska X on rajoitettu ja jatkuva, on se ennustettava, joten $X \in \Pi_2(X)$. Vastaavasti $X_n \in b\Pi_1 \subset \Pi_2(X)$. Käytämme isometriaominaisuutta, jonka mukaan

$$\| (X - X_n)\cdot X \|_{\mathscr{M}^2}^2 = \| X - X_n \|_X^2 = \mathbf{E} \int_0^\infty (X - X_n)^2(s)\,\mathrm{d}\langle X \rangle_s$$

Koska $(X - X_n)^2 \leq C$ jollakin vakiolla ja $\langle X \rangle_\infty < \infty$, niin voimme käyttää rajoitetun suppenemisen lausetta. Koska $X_n(s,\omega) \to X(s,\omega)$ jatkuvuuden nojalla, niin

$$\lim_{n\to\infty} \| (X - X_n)\cdot X \|_{\mathscr{M}^2}^2 = 0.$$

Tämän laajentamisen koskemaan jatkuvia lokaaleja martingaaleja ja semimartingaaleja jätämme harjoitustehtäväksi (HT). $\square$

Olemme nyt osoittaneet tärkeän erikoistapauksen It-on kaavasta (5.37).

5.42. **Esimerkki.** Voimme harjoituksen vuoksi laskea sen avulla, mitä on $\mathrm{d}(X^3)_t$ kun X on jatkuva lokaali martingaali. Nyt $X^3 = X^2 X$, joten osittaisintegrointikaavan nojalla

$$\mathrm{d}(X^3)_t = X\,\mathrm{d}(X^2)_t + X^2\,\mathrm{d}X_t + \mathrm{d}\langle X^2, X \rangle_t.$$

Voimme sieventää tätä käyttämällä liitännäisyyttä ja tuntemaamme esitystä

$$\mathrm{d}(X^2)_t = 2X_t\,\mathrm{d}X_t + \mathrm{d}\langle X \rangle_t,$$

joten voimme päätellä (HT, miksi lokaalisti rajoitetusti heilahteleva osuus käyttäytyy liitännäisyyslain mukaisesti) että

$$\mathrm{d}(X^3)_t = 3X_t^2\,\mathrm{d}X_t + X_t\,\mathrm{d}\langle X \rangle_t + \mathrm{d}\langle X^2, X \rangle_t.$$

Sievennämme nyt kärkisulkuprosessin. Koska X itsessään jatkuva lokaali martingaali, joten sen martingaaliosa on differentiaalimuodossa $\mathrm{d}X_t$. Prosessin X^2 martingaaliosa on differentiaalimuodossa $\mathrm{d}M_t := 2X\,\mathrm{d}X_t$, joten

$$\mathrm{d}\langle X^2, X \rangle_t = \mathrm{d}\langle M, X \rangle = 2X_t\,\mathrm{d}\langle X \rangle_t$$

missä viimeisessä kohdassa käytimme Lauseen 5.34 differentiaalimuotoa

$$\mathrm{d}\langle H\cdot X, K\cdot Y \rangle_t = H(t)K(t)\,\mathrm{d}\langle X, Y \rangle_t$$

Yhdistämällä nämä saamme

$$\mathrm{d}(X^3)_t = 3X_t^2\,\mathrm{d}X_t + 3X_t\,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_t,$$

mikä on myös It-on kaavan erikoistapaus, kun $d = 1$ ja $f(x) = x^3$, sillä $f'(x) = 3x^2$ ja $\frac{1}{2}f''(x) = 3x$.

Havaitsimme esimerkin avulla, että pystyimme laajentamaan tietoamme niistä funktioista, joille It=on kaava on voimassa. Voimme helposti yleistää tämän esimerkin seuraavaan lemmaan, jonka todistus jää harjoitustehtäväksi. Merkitään jatkossa seuraavasti:

$$\mathscr{I} := \{\ f \in C^2(\mathbb{R}^d) :\ f \text{ on reaaliarvoinen ja toteuttaa Itōn kaavan (5.37)}\ \}$$

Havaitsemme, että ainakin vakiofunktio $f(x) = 1$ sisältyy Itōn funktioihin. Tämän avulla voidaan induktiivisesti kasvattaa joukkoa paljon.

5.43. **Lemma.** *Joukko $\mathscr{I}$ on lineaarinen ja jos $f \in \mathscr{I}$, niin $(x_1, \ldots, x_d) \mapsto x_j f(x_1, \ldots, x_d)$. Erityisesti kaikki polynomifunktiot sisältyvät vektoriavaruuteen $\mathscr{I}$.*

Todistus. HT. □

Nyt haluaisimme laajentaa väitteen sisältämään kaikki reaaliarvoiset $C^2(\mathbb{R}^d)$-funktiot. Käyttämämme monotonisuuteen perustava joukkoluokkien kasvattaminen ei tule nyt kyseeseen, sillä derivointi ei ole yhteensopiva järjestysrelaation kanssa. Voimme approksimoida polynomeilla tasaisesti jatkuvia funktioita kompakteilla joukoilla Stonen–Weierstraßin lauseen nojalla. Jaamme osoituksen kirjaimellisesti osiin. Seuraavassa käytämme merkintää $f_k = \partial_k f$ ja yläindeksi p^n ei tarkoita potenssia, vaan n on indeksöintimerkki.

5.44. **Lemma** (Polynomiapproksimointi)**.** *Olkoon $K = [-M, M]^d$ suljettu kuutio ja $f \in C^2(K)$. Tällöin löytyy sellainen jono (p^n) polynomeja, että*

$$\|\, f - p^n \,\|_K, \|\, f_k - p_k^n \,\|_K, \|\, f_{kl} - p_{kl}^n \,\|_K \to 0,$$

kun $n \to \infty$ ja $\|\, g \,\|_K = \sup\{\ |g(x)| :\ x \in K\ \}$.

Todistus. Olkoon jatkossa $\varepsilon > 0$ annettu mielivaltaisen pieni luku. Sanomme, että funktio p arvioi funktiota f hyvin, jos löytyy sellainen vakiot $c(f)$, $c^k(f)$, ja $c^{kl}(f)$, että $\|\, p - f \,\| \le c(f)\varepsilon$, $\|\, p_k - f_k \,\| \le c^k(f)\varepsilon$ ja $\|\, p_{kl} - f_{kl} \,\| \le c^{kl}(f)\varepsilon$. Tärkeää on siis, ettei vakiot riipu funktio valinnasta.

Huomaamme heti, että jos p^1 arvioi hyvin funktiota f^1 ja p^2 arvioi hyvin funktiota f^2, niin $p^1 + p^2$ arvioi hyvin funktiota $f^1 + f^2$. Tätä lineaarisuusominaisuutta tarvitsemme myöhemmin osoituksen aikana.

Oletetaan aluksi, että $f(x_1, \dots, x_d) = g(x_j)$. Tällöin väite seuraa Stonen–Weierstraßin lauseesta, sillä voimme valita sellainen polynomin $p_{jj}(x_1, \dots, x_d) = p''(x_j)$, että $\| p_{jj} - f_{jj} \|_K < \varepsilon$. Määritellään tämän avulla oleellisesti yhden muuttujan polynomit

$$p_j(x_1, \dots, x_d) = g'(0) + \int_0^{x_j} p''(t)\,\mathrm{d}t =: p'(x_j)$$

ja

$$p(x_1, \dots, x_d) = g(0) + \int_0^{x_j} p'(t)\,\mathrm{d}t =: p(x_j)$$

Tällöin muut toisen kertaluvun derivaatat $p_{jk} = f_{jk} = 0$. Myös muut ensimmäisen kertaluvun derivaatat $p_k = f_k = 0$. Siis riittää näyttää, että $\| p - f \|_K \leq C_0(f)\varepsilon$ ja $\| p_j - f_j \| \leq C_1(f)\varepsilon$. Koska

$$p_j(x) - f_j(x) = \int_0^{x_j} (p''(t) - g''(t))\,\mathrm{d}t,$$

niin $\| p_j - f_j \| \leq M \| p_{jj} - f_{jj} \| \leq M\varepsilon$. Vastaavasti $\| p - f \| \leq M^2 \| p_{jj} - f_{jj} \| < M^2\varepsilon$. Siispä väite pitää paikkaansa ainakin tällaisille funktiolle.
Oletetaan, että $f(x_1, \dots, x_d) = f^1(x_1) \times \dots \times f^d(x_d) = f^1 \otimes \dots \otimes f^d(x_1, \dots, x_d)$. Koska kutakin funktiota f^j voidaan arvioida hyvin polynomilla p^j, niin polynomi

$$p(x_1, \dots, x_d) = p^1(x_1) \times \dots \times p^d(x_d)$$

arvioi hyvin funktiota f, sillä lisäämällä ja vähentämällä ja käyttämällä tietoa, että $\| fg \|_K \leq \| f \|_K \| g \|_K$ voimme kirjoittaa

$$\| p - f \| \leq \| p^1 - f^1 \| \| p^2 \otimes \dots \otimes p^d \| + \dots + \| p^d - f^d \| \| f^1 \otimes \dots \otimes f^{d-1} \|$$

Välissä olevat tensoritulotermit sisältävät sekä termejä p^j että termejä f^k. Koska esimerkiksi

$$\| f^1 \otimes \dots \otimes f^j \otimes p^{j+1} \otimes \dots \otimes p^d \| \leq \prod_{i \leq j} \| f^i \|_\infty \times \prod_{i > j} \| p^i \|_\infty \leq 2^{d-j} \prod_i \| f^i \|_\infty,$$

niin saamme arvion

$$\| p - f \| \leq 2^d (c(f^1)\varepsilon + \dots + c(f^d)\varepsilon) \prod_i \| f^i \|_\infty =: c(f)\varepsilon.$$

Derivoimalla näemme, että esimerkiksi $f_1 = Df^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^d$ ja $p_1 = Dp^1 \otimes p^2 \otimes \dots \otimes p^d$. Saamme samalla laskulla siten arvion

$$\| p_1 - f_1 \| \leq 2^d (c^1(f^1) + c(f^2) + \dots + c(f^d))\varepsilon \| Df^1 \|_\infty \prod_{i > 1} \| f^i \|_\infty =: c^1(f)\varepsilon.$$

Siten havaitsemme, että p arvioi hyvin funktiota f.
Riittää siten osoittaa, että mielivaltaista funktiota f voidaan arvioida hyvin lineaarisella yhdisteellä yksiulotteisten C^2-funktioiden tensorituloilla. Tämän

teemme jakamalla kuution pienen pieniin osiin ja käyttämällä Taylorin kaavaa näissä pienissä paloissa. Tämä tekniikka tunnetaan *ykkösen jaon tekniikkana.*

Tätä ykkösen jakoa varten tarvitsemme funktion

$$\varphi^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

joka on C^2, joka on identtisesti nolla, kun $|x| \geq 1$ ja joka > 0 kun $|x| < 1$ (HT. rakenna tällainen funktio). Tällöin funktio

$$\varphi^1(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi^0(x + k)$$

on C^2-funktio, joka on aidosti positiivinen kaikilla x. Lisäksi

$$\varphi(x) := \varphi^0(x)/\varphi^1(x)$$

on nyt C^2-funktio, joka häviää välin $(-1, 1)$ ulkopuolella ja lisäksi

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x + k)$$

Vaikka sarja näyttää äärettömältä, niin esimerkiksi, kun $x = \frac{1}{2}$, niin ainoastaan $k = 0$ ja $k = -1$ ovat mukana summassa nollasta eroavina termeinä. Voimme nyt määritellä funktion $\psi^n(x) := \varphi(xn)$, mikä häviää välin $(-1/n, 1/n)$ ulkopuolella ja

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi^n(x + k/n)$$

Nyt funktio $\Psi^n(x_1, \dots, x_d) = \psi^n \otimes \dots \psi^n(x_1, \dots, x_d)$ jakaa koko $\mathbb{R}^d$:n pieniin kuutiohin. Siispä

$$f(x) = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^d} f(x)\Psi^n(x + \bar{k}/n)$$

Koska K on kompakti, niin kuutioita, missä $x \mapsto f(x)\Psi^n(x + \bar{k}/n)$ ei häviä identtisesti, on vain äärellinen määrä. Voimme siten kirjoittaa, että

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} f^j(x),$$

missä $f^j(x) = f(x)\Psi^n(x + z^j)$ jollakin $z^j \in K$. Kun n on hyvin suuri, niin kuutio $z^j + [-1/n, 1/n]^d$ on hyvin pieni. Siispä tässä kuutiossa funktiota f voi hyvin arvioida Taylorin kehitelmällä, joten

$$f^j(x) = p^j(x)\Psi^n(x + z^j) + g^j(x)\Psi^n(x + z^j)$$

missä virhetermin g^j sup-normi, ensimmäisen kertaluvun derivaattojen g^j_k sekä toisen kertaluvun derivaattojen g^j_{kl} saadaan mielivaltaisen pieneksi valitsemalla n suureksi. Edelleen kompaktisuuden nojalla voidaan näyttää, että vaikka luvun n valinta riippuukin äskeisessä päätelmässä kuutiosta, niin voimme saada samanaikaisesti kaikki virhetermit pieniksi valitsemalla riittävän suuri n.

Olemme siis päätelleet, että funktio

$$h(x) := \sum_{j=1}^{N} p^j(x)\Psi^n(x+z^j)$$

arvioi funktiota f hyvin. Toisaalta funktio h on C^2-funktio, joka on lineaarinen yhdiste tensorituloista, joten koko väite on osoitettu. □

Näiden tuloksien avulla voimme osoittaa Itōn kaavan kaikille C^2-funktioille.

5.45. **Lause** (Itōn kaava)**.** *Olkoon $X = (X^j)$ jatkuva d-ulotteinen semimartingaali ja $f \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Tällöin $f(X_t)$ on jatkuva semimartingaali ja*

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_j \int_0^t f_j(X_t)\,\mathrm{d}X_t^j + \tfrac{1}{2}\sum_{j,k}\int_0^t f_{jk}(X_t)\,\mathrm{d}\langle\, X^j, X^k \,\rangle_t$$

melkein varmasti.

Todistus. Olkoon $t \in T$ kiinteä. Haluamme osoittaa, että

$$\mathbf{E}\left(f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t f_j(X_s)\,\mathrm{d}X_s^j - \tfrac{1}{2}\int_0^t f_{jk}(X_s)\,\mathrm{d}\langle\, X^j, X^k \,\rangle_s\right)^2 = 0$$

missä poistimme summamerkit ns. *Einsteinin summaussäännön* mukaisesti, missä summaamme yli indeksien jotka toistuvat sekä ylä- että alaindeksissä. Koska tiedämme väitteen polynomeille, niin voimme lisätä sen edelliseen kaavaan, ja sovellamme kolmioepäyhtälöä, sekä arvioita $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2)$, niin havaitsemme, että väitteen osoittamiseksi riittää näyttää, että löytyy polynomijono (p^n), jolle

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,(f(X_t) - p^n(X_t))^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,(f(X_0) - p^n(X_0))^2 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\int_0^t (f_j(X_s) - p_j^n(X_s))\,\mathrm{d}X_t^j\right)^2 = 0$$

sekä

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\int_0^t (f_{jk}(X_s) - p_{jk}^n(X_s))\,\mathrm{d}\langle\, X^j, X^k \,\rangle_s\right)^2 = 0$$

Valitettavasti tällaista jonoa ei välttämättä löydy. Mutta edellisen tuloksen nojalla tällainen jono löytyy, jos prosessi X ei poistu kuutiosta $K = [-N, N]^d$. Tämän takia pysäytämme prosessin tähän kuutioon. Olkoon siis

$$\tau_N = \inf\{\ t > 0 :\ X_t \notin K \text{ tai } M_t \notin K\ \}$$

missä $X = M + A$ on semimartingaalin jako lokaaliin martingaaliin ja lokaalisti rajoitetusti heilahtelevaan osaan. Toisaalta, kun $N \to \infty$, niin $\tau_N \to \infty$, joten voimme olettaa, että $X_t \in K$ koko ajan. Siis X on rajoitettu ja $\mathbf{E}\,\langle\, X \,\rangle_\infty^j \le N^2$ ja $\mathbf{E}\,\langle\, X^j \,\rangle_\infty \langle\, X^k \,\rangle_\infty \le N^4$. Tällöin löydämme polynomijonon (p^n) jonka kaikki derivaatat kertalukuun 2 asti suppenevat tasaisesti kuutiossa K kohti funktion f vastaavia derivaattoja. Siispä

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(f(X_t) - p^n(X_t)\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(f(X_0) - p^n(X_0)\right)^2 = 0,$$

on selviö. Myös rajoitetusti lokaalisti heilahteleva osa

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\int_0^t (f_{jk}(X_s) - p^n_{jk}(X_s))\,\mathrm{d}\langle X^j, X^k\rangle_s\right)^2 \\
&\qquad\qquad \le \| f_{jk} - p^n_{jk} \|_K^2 \mathbf{E}\left(\int_0^t |\,\mathrm{d}\langle X^j, X^k\rangle_s|\right)^2 \\
&\qquad\qquad \le \| f_{jk} - p^n_{jk} \|_K^2 \mathbf{E}\,\langle X^j\rangle_t \langle X^k\rangle_t \to 0
\end{aligned}$$

Kunitan–Watanaben epäyhtälön nojalla. Martingaalitermiin sovellamme Itōn isometriaa, sillä $H_n(s) := f_j(X_s) - p^n_j(X_s)$ on jatkuva ja ennustettava ja se lisäksi kuuluu luokkaan $\Pi_2(X^j)$. Tämä siksi, että

$$\mathbf{E}\int_0^\infty H_n(s)^2\,\mathrm{d}\langle X^j\rangle_t \le \| f_j - p_j \|_K^2 \mathbf{E}\,\langle X^j\rangle_\infty < \infty$$

Siispä

$$\sup_{t\ge 0} \mathbf{E}\left(\int_0^t (f_j(X_s) - p^n_j(X_s))\,\mathrm{d}X^j_t\right)^2 \le N^2 \| f_j - p_j \|^2 \to 0$$

kun $n \to \infty$. Olemme siten osoittaneet, että Itōn kaava on voimassa jokaiselle $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ semimartingaalille $Y^N_t := X(t \wedge \tau_N)$. Kun $N \to \infty$, niin $X(t\wedge\tau_N) \to X(t)$ melkein varmasti, joten tavallisten suppenemistulosten avulla koko väite seuraa (HT. mieti yksityiskohdat). □