5.20. **Lemma.** *Jos $H, K \in b\Pi_0$ ja X ja Y ovat rajoitettuja jatkuvia martingaaleja, niin*

$$\langle (H \cdot X), (K \cdot Y) \rangle_t = \int_0^t H(s)K(s)\,\mathrm{d}\langle X, Y \rangle_s.$$

Erityisesti,

$$\mathbf{E}\,(H \cdot X)_t(K \cdot Y)_t = \mathbf{E} \int_0^t H(s)K(s)\,\mathrm{d}\langle X, Y \rangle_s$$

Todistus. Oletetaan aluksi, että $H = C[\, s \in (a,b]\,]$ ja $K = D[\, s \in (a,b]\,]$. Tällöin kovarianssiprosessin määritelmän nojalla yritämme näyttää, että

$$Z_t := (H \cdot X)_t(K \cdot Y)_t - \int_0^t H_s K_s\,\mathrm{d}\langle X, Y \rangle_s =: V(t) - R(t)$$

on martingaali. Osoitamme väitteen ensin kun, $a \le s < t \le b$. Kun tämä on osoitettu, niin jos $s < a$, niin

$$\mathbf{E}\,\left(Z(t) \,|\, \mathscr{F}_s\right) = \mathbf{E}\,\left(\mathbf{E}\,\left(Z(t) \,|\, \mathscr{F}_a\right) \,|\, \mathscr{F}_s\right) = \mathbf{E}\,\left(0 \,|\, \mathscr{F}_s\right) = 0 = Z(s)$$

Jos taas $s > b$, niin

$$\mathbf{E}\,\left(Z(t) \,|\, \mathscr{F}_s\right) = Z(b) = Z(s).$$

Nyt $\mathbf{E}\,\left(V(t) \,|\, \mathscr{F}_s\right) = CD\mathbf{E}\,\left((X_t - X_a)(Y_t - Y_a) \,|\, \mathscr{F}_s\right) =: CD\mathbf{E}\,\left(V'(t) \,|\, \mathscr{F}_s\right)$. Vastaavasti

$$\mathbf{E}\,\left(R(t) \,|\, \mathscr{F}_s\right) = CD\mathbf{E}\,\left(\langle X, Y \rangle_t - \langle X, Y \rangle_a \,|\, \mathscr{F}_s\right) =: CD\mathbf{E}\,\left(R'(t) \,|\, \mathscr{F}_s\right).$$

Ryhmittelemme nyt termit sopivasti, jolloin

$$\begin{aligned} V'(t) - R'(t) &= (X_tY_t - \langle X, Y \rangle_t) - (X_aY_a - \langle X, Y \rangle_a) - X_tY_a - X_aY_t \\ &=: V_1(t) - V_2 - V_3(t) - V_4(t) \end{aligned}$$

Ensimmäisen termin ehdollinen odotusarvo on

$$\mathbf{E}\,\left(V_1(t) \,|\, \mathscr{F}_s\right) = V_1(s)$$

Seuraava on jo $\mathscr{F}_s$-mitallinen ja martingaaliominaisuuden nojalla havaitsemmekin siten, että

$$\mathbf{E}\,\left(V'(t) - R'(t) \,|\, \mathscr{F}_s\right) = V_1(s) - V_2 - V_3(s) - V_4(s) = V'(s) - R'(s),$$

joten $\mathbf{E}\,\left(Z(t) \,|\, \mathscr{F}_s\right) = Z(s)$. □

Olemme valmiita yleistämään Lemmat 5.17 ja 5.20 yksinkertaisille ennustettaville prosesseille. Määrittelemme alustavasti integraalin yksinkertaisille ennustettaville prosesseille.

5.21. **Alustava määritelmä.** Kun $H(s) = H_1(s) + \dots H_m(s) \in \Lambda_1$ ja $H_j H_k = 0$, kun $k \neq j$ niin määrittelemme, että

$$(H \cdot B)_t := \sum_{k=1}^{m} \int_0^t H_k(s)\,\mathrm{d}B(s).$$

Tämän hyvin ennakoitavan määritelmän nojalla seuraava lemma on selviö.

5.22. **Lemma.** *Lemmat 5.20 ja 5.17 ovat voimassa, kun Π_0 korvataan Π_1:llä.*

Todistus. HT. □

Lemman 5.22 ja siten Lemman 5.20 nojalla tiedämme erityisesti, kun $H = K$ sekä $X = Y$, että

$$\mathbf{E}\,(H \cdot X)_t^2 = \mathbf{E} \int_0^t H(s)^2\,\mathrm{d}\langle\, X \,\rangle_s$$

jokaisella t, joten erityisesti, kun X on rajoitettu martingaali, niin

$$\begin{aligned} \|\,(H \cdot X)\,\|_{\mathscr{M}^2}^2 &= \sup_{t \geq 0} \mathbf{E}\,(H \cdot X)_t^2 = \sup_{t \geq 0} \mathbf{E} \int_0^t H(s)^2\,\mathrm{d}\langle\, X \,\rangle_s \\ &= \|\, H \,\|_X^2 < \infty, \end{aligned} \tag{5.23}$$

joka siis antaa kahden *positiivisen luvun* yhtäsuuruuden. Jos pidämme prosessia $H \in b\Pi$ muuttujana, niin identiteetti antaa siten kuvausten $f_1(H) := H \mapsto \|\,(H \cdot X)\,\|_{\mathscr{M}^2}$ ja $f_2(H) := H \mapsto \|\, H \,\|_X$ arvojen yhtäsuuruuden. Ensimmäinen kuvaus f_1 kuvaa *avaruuden*

$$\mathscr{M}^2 := \{\, Y : \ Y \text{ on adaptoitu martingaali, jolle } \|\, Y \,\|_{\mathscr{M}^2}^2 = \sup_{t \geq 0} \mathbf{E}\, Y_t^2 < \infty \,\}$$

positiivisille luvuille $\mathbb{R}_+$. Toinen kuvaus f_2 puolestaan kuvaa *avaruuden*

$$\Pi_2(X) := \{\, K : \ K \text{ on adaptoitu ennustettava prosessi, jolle } \|\, K \,\|_X < \infty \,\}$$

positiivisille luvuille. Haluammekin löytää kuvauksen $\mathscr{I} \colon \Pi_2(X) \to \mathscr{M}^2$, joka tekisi seuraavasta kuvaajasta kommutoivan. Koska $b\Pi_1 \subset \Pi_2(X)$, niin tiedämme kuvausken $\mathscr{I}' \colon b\Pi_1 \to \mathscr{M}^2$ olevan olemassa. Käytämme tätä kuvaajan $\mathscr{I}$ rakentamiseen funktionaalianalyysin keinoin. Näytämme seuraavat asiat

i) kuvaus $Y \mapsto \|\, Y \,\|_{\mathscr{M}^2}$ on normi ja $K \mapsto \|\, K \,\|_X$ on normi
ii) osajoukko $b\Pi_1 \subset \Pi_2(X)$ on tiheä, eli jokaista $H \in \Pi_2(X)$ kohti löytyy sellainen jono $(H_n) \subset b\Pi_1$, että $\|\, H - H_n \,\|_X \to 0$.
iii) normiavaruus $(\mathscr{M}^2, \|\cdot\|_{\mathscr{M}^2})$ on täydellinen eli jokainen avaruuden Cauchyn jono suppenee.

Näiden tietojen avulla voimme määritellä halutun kuvauksen $\mathscr{I}$ seuraavasti:

$$\mathscr{I}(H) := \lim_{n \to \infty} \mathscr{I}'(H_n), \text{ kun } (H_n) \subset b\Pi_1 \text{ ja } \lim_{n \to \infty} \|\, H_n - H \,\|_X = 0.$$

Kohdan *ii*) nojalla tällainen approksimoiva jono (H_n) on aina löydettävissä. Mikään ei kuitenkaan takaa, että jono olisi yksikäsitteinen, joten on näytettävä myös, ettei kuvaus $\mathscr{I}$ riipu jonon valinnasta. Edelleen on näytettävä, että $\mathscr{I}(H) \in \mathscr{M}^2$ eli kuvauksella on halutut ominaisuudet.

Kun tämä on tehty, voimme käyttää kuvausta $\mathscr{I}$ stokastisen integraalin määrittelyssä.

5.24. **Alustava määritelmä.** Jos $H \in \Pi_2(X)$, niin ennustettavan prosessin H stokastinen integraali rajoitetun martingaalin X suhteen on

$$(H \cdot X)_t := \int_0^t H(s)\,\mathrm{d}X(s) := \mathscr{I}(H)(t).$$

Nyt voimme näyttää, että $\mathscr{I}$ on rakennettavissa. Näytämme ensin, jos (H_n) on prosessia H approksimoiva jono, niin

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{I}'(H_n) \in \mathscr{M}^2$$

eli raja-arvo on olemassa. Tämä on helppo, sillä $\mathscr{M}^2$ on täydellinen. Riittää siis osoittaa, että jono $(\mathscr{I}'(H_n))$ on avaruuden $\mathscr{M}^2$ Cauchyn jono.

Nyt

$$\| \mathscr{I}'(H_n) - \mathscr{I}'(H_m) \|_{\mathscr{M}^2} = \| \Big((H_n - H_m) \cdot X\Big) \|_{\mathscr{M}^2} = \| H_n - H_m \|_X$$

isometriakaavan (5.23) nojalla. Koska (H_n) on suppenevana jonona Cauchyn jono, niin oikea puoli lähestyy nollaa, kun $n, m \to \infty$, joten $(\mathscr{I}'(H_n))$ on Cauchyn jono.

Seuraava ”kikkakolmonen” on todellinen perustemppu, joten se on hyvä käydä jälleen kerran läpi. Haluamme nyt osoittaa, että raja-arvot

$$M_1 := \lim_{n\to\infty} \mathscr{I}'(H_n) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{I}'(K_n) =: M_2$$

olivat (H_n) ja (K_n) mitä tahansa prosessin H approksimoivia yksinkertaisten ennustettavien prosessien muodostamia jonoja. Tämän tiedon avulla tiedämme, että $\mathscr{I} : \Pi_2(X) \to \mathscr{M}^2$ on olemassa ja siten määritelmämme stokastiselle integraalille on hyvin asetettu.

Olkoon $(H_n), (K_n) \subset b\Pi_1$ kaksi prosessia H approksimoivaa jonoa. Määrittelemme jonon

$$L_n := \sum_{k\in\mathbb{N}} ([\, n = 2k \,]H_k + [\, n = 2k + 1 \,]K_k).$$

Jono $(L_n) \subset b\Pi_1$, sillä jokaisella n vain yksi summattavista poikkeaa nollasta. Kun $\varepsilon > 0$, niin oletuksen perusteella löytyy sellainen $N \in \mathbb{N}$, että $\| H_n - H \| \vee \| K_n - H \| < \varepsilon$ jokaisella $n \geq N$. Kun $n \to \infty$, niin

$$\| H - L_n \| [\, n = 2k \geq 2N + 1 \,] = \| H - H_k \| [\, n = 2k, k > N \,] < \varepsilon.$$

Vastaavasti

$$\| H - L_n \| [n = 2k + 1 \geq 2N + 1] = \| H - K_k \| [n = 2k + 1, k \geq N] < \varepsilon.$$

Summamalla nämä yhteen, ja summaamalla yli k:n havaitsemme siten, että

$$\| H - L_n \| [n \geq 2N + 1] < \varepsilon.$$

Siispä (L_n) suppenee myös kohti prosessia H. Yllä jo osoitimme, että tästä seuraa, että jono $(\mathscr{I}'(L_n))$ suppenee kohti jotain alkiota $M \in \mathscr{M}^2$. Koska $(\mathscr{I}'(H_n)) \subset (\mathscr{I}'(L_n))$, niin osajono $\mathscr{I}'(H_n) \to M$ myöskin. Raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $M_1 = M$. Vastaavasti näemme, että $M_2 = M$, joten raja-arvot ovat samat.

Olemme siis muutamaa teknistä yksityiskohtaa (eli Lausetta 5.18 ja kohtia *i*), *ii*) sekä *iii*)) vaille määritelleet Itōn integraalin jo varsin suurelle luokalle ennustettavia prosesseja.

5.25. **Esimerkki.** Jos $X = B$ on Brownin liike, niin $\langle X \rangle = t$. Edelleen $H(t) = B(t)^k$ on jatkuva ja adaptoitu, eli se on ennustettava. Siispä $H'(t) = H(s)[\, t \in (0, s]\,]$ on myös ennustettava ja

$$\mathbf{E} \int H'(t)^2 \, \mathrm{d}t = \mathbf{E} \int_0^s B(t)^{2k} \, \mathrm{d}t = C_k \int_0^s t^k \, \mathrm{d}t < \infty$$

Päättelemme siten, että prosessi $H' \in \Pi_2(X)$. Toisaalta havaitsemme, että $H \notin \Pi_2(X)$ vaikka jokaisella *kiinteällä* $t \geq 0$ vastaava katkaistu prosessi sinne kuuluukin.

Tämän esimerkin rajoite näyttää hieman keinotekoiselta ja on helposti poistettavissa.

5.26. **Määritelmä.** Olkoon $\Pi_3(X)$ niiden ennustettavien prosessien H joukko, jolle

$$\int_0^t H(s)^2 \, \mathrm{d}\langle X \rangle_s < \infty$$

melkein varmasti jokaisella $t \geq 0$.

On varsin selvää, että $\Pi_2(X) \subset \Pi_3(X)$. Edellä käydyn esimerkin prosessi $H \notin \Pi_2(X)$ kuuluu joukkoon $\Pi_3(X)$, sillä

$$\mathbf{E} \int_0^t H(s)^2 \, \mathrm{d}s =: \mathbf{E}\, K(t) < \infty,$$

ja siten $K(t) < \infty$ melkein varmasti. Tämä myöskin selittää, miksi emme enää vaatineet odotusarvon olevan äärellinen, sillä sehän on huomattavasti rajoittavampi vaatimus ja mehän pyrimme yleistämään, emme rajoittamaan.

Kuinka määrittelemme prosessin $H \in \Pi_3(X)$ stokastisen integraalin rajoitetun martingaalin X suhteen. Edellä ollut esimerkki valaissee myös tätä. Katkaisemme vain integroitavat prosessit, kun ne meinaavat kasvaa liikaa. Olkoon siis $H \in \Pi_3(X)$ ja

$$\tau_n := \inf\{\, t \geq 0 : \int_0^t H^2(s)\,\mathrm{d}\langle X \rangle_s > n \,\}$$

Tiedämme jo, että τ_n on pysähdyshetki ja koska H^2 ja $\langle X \rangle_s$ ovat ennustettavia prosesseja, niin $[\, s \leq \tau_n \,]$ on ennustettava càglàd-prosessi. Siispä katkaistu prosessi

$$H_n(t) = H(t)[\, t \leq \tau_n \,]$$

on joukon $\Pi_2(X)$ alkio, sillä $\| H_n \|_X \leq n$. Koska $H \in \Pi_3(X)$, niin jokaisella kiinteällä $t \geq 0$ on melkein varmasti $\tau_n > t$ riittävän suurilla n. Siispä

$$H(t) = H_n(t)$$

kunhan n on riittävän suuri. Siispä

$$(H \cdot X)(t) = (H_n \cdot X)(t)$$

riittävän suurilla n. Koska n vielä riippuu t:stä, tämä ei ole riittävä määritelmä. Haluaisimme asettaa

$$(H \cdot X)(t) = \lim_{n \to \infty} (H_n \cdot X)(t),$$

sillä äskeisen perusteella jokaisella kiinteällä t raja-arvo oikealla on melkein varmasti olemassa. Voimme määrätä integraalin ilman raja-arvoakin seuraavasti.

Kun $n > m$, niin $H_n(t)[\, t \leq \tau_m \,] = H_m(t)$ ja siten

$$\Big((H_n - H_m) \cdot X\Big)_t [\, t \leq \tau_m \,] = 0$$

jokaisella $n > m$. Lineaarisuuden nojalla tämä voidaan myös muotoilla

$$(H_n \cdot X)_t [\, t \leq \tau_m \,] = (H_m \cdot X)_t [\, t \leq \tau_m \,].$$

Valitsemalla nyt n riittävän suureksi, saamme

$$(H \cdot X)_t [\, t \leq \tau_m \,] = (H_m \cdot X)_t [\, t \leq \tau_m \,],$$

joten jos määrittelemme

$$(H \cdot X)_t := \sum_{k \geq 1} (H_k \cdot X)_t [\, \tau_{k-1} < t \leq \tau_k \,]$$

olemme saaneet yllämainitun raja-arvon määrättyä.

Ennenkuin jatkamme integraalin kahden tärkeän ominaisuuden (eli niiden kahden lemman, joita olemme askelittain yleistäneet) todistamisen tässä yleisyydessä, osoitamme kohdat *i*),*ii*) ja *iii*) ensin, ettei koko korttitalo ole koko ajan romahtamaisillaan. Lauseen 5.18 todistusta lykkäämme edelleen (ei siksi, että se olisi erityisen vaikea, mutta sen läpikäynti keskeyttää ajatuksen).

Kohta *i*) on varsin helppo, sillä siinä tulee osoittaa, että

$$\| x \| \geq 0, \quad \| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|, \quad \text{ja} \quad \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

ja lisäksi, että jos $\| x \| = 0$, niin $x = 0$. Positiivisuus sekä homogeenisuusehto ovat molemmissa tapauksissa selviöitä. Kolmioepäyhtälön osoittaminen jätettäköön harjoitustehtäväksi.

Kohdan ii) todistus. Kohta *ii*) seuraa tietyssä mielessä kohdasta *i*) ja esityksestämme ennustettavalle σ-algebralle Π. Tiedämme, että joukot $(a, b] \times A$ virittävät koko σ-algebran Π, joten niiden virittämä algebran monotoniset rajat antavat koko σ-algebran Π. Jos $\mathscr{A}$ on joukkojen $(a, b] \times A$ virittämä algebra, niin

$$\mathscr{A} = \{ \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j] \times A_j : \ A_j \in \mathscr{F}_{a_j}, a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \cdots \leq a_n < b_n \}.$$

Siispä jokainen H, joka on Π-mitallinen, on monotoninen raja yksinkertaisista ennustettavista prosesesseista. Oletetaan, että

$$\mathbf{E} \int_0^\infty H^2(t) \, \mathrm{d}\langle X \rangle_t < \infty$$

ja että $H_n \uparrow H$. Tällöin $(H - H_n)^2 \leq 2|H|(H - H_n) < 4H^2$, joten dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E} \int_0^\infty (H(t) - H_n(t))^2 \, \mathrm{d}\langle X \rangle_t = 0.$$

□

Kohdan iii) todistus. Haluamme nyt näyttää, että neliöintegroituvien martingaalien avaruus varustettuna normilla $M \mapsto \| M \|_{\mathscr{M}^2} =: \| M \|$ on täydellinen. Todistuksia on monia, mutta tehdään seuraavassa varsin elementaarinen todistus.

Oletetaan, että (M_n) on Cauchyn jono avaruudessa $\mathscr{M}^2$. Siispä

$$\mathbf{E} \, (M_n(t) - M_m(t))^2 \leq \| M_n - M_m \| = \sup_{s \geq 0} \mathbf{E} \, |M_n(s) - M'(s)|^2 \to 0$$

jokaisella $s \geq 0$. Koska $M_{n,m} = M_n - M_n$ on martingaali, niin $M_{n,m}^2$ on submartingaali. Siispä

$$\mathbf{E} \, M_{n,m}(s)^2 \leq \mathbf{E} \, M_{n,m}(t)^2$$

jokaisella $s \leq t$, joten joten jo pelkästään tiedosta, että $(M_n(t))$ on Cauchyn jono $L^2(\Omega)$ seuraa, että

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \, |M_n(s) - M'(s)|^2 \to 0.$$

Eli voisimme korvata sup-suppenemisvaatimuksen yli *äärellisen välin* pelkän pistettäisen suppenemisen vaatimukseen välin ylärajalla. Jos siis menisimme rajalle $t \to \infty$, niin sup-vaatimus

$$\| M_{n,m} \| \to 0$$

olisi korvattavissa vaatimuksella

$$\mathbf{E}\, M_{n,m}(\infty)^2 \ \to 0.$$

Ja todellakin tämä on täysin pitävä argumentti. Koska M_n on nyt L^2-rajoitettu martingaali, niin martingaalikonvergenssilauseen nojalla on olemassa melkein varma (ja L^2-raja)

$$M_n(\infty) = \lim_{t\to\infty} M_n(t).$$

Koska $M_{n,m}^2$ on submartingaali, joten

$$\| M_{n,m} \|^2 = \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\, M_{n,m}(t)^2 \ = \mathbf{E}\left(M_n(\infty) - M_m(\infty)\right)^2.$$

Tämän isometrisyysominaisuuden nojalla $(M_n(\infty))$ on Cauchyn jono avaruudessa $L^2(\Omega)$, niin joten on olemassa rajasatunnaismuuttuja $M(\infty)$. Voimme nyt määritellä tämän avulla martingaalin

$$M(t) = \mathbf{E}\ (M(\infty) \,|\, \mathscr{F}_t)$$

ja koska tiedämme myös, että $M_n(t) = \mathbf{E}\ (M_n(\infty) \,|\, \mathscr{F}_t)$, joten

$$\| M - M_n \| = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\ (M(\infty) - M_n(\infty) \,|\, \mathscr{F}_t)\ ^2\right) \ \le \mathbf{E}\left(M(\infty) - M_n(\infty)\right)^2$$

joko Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön tai Jensenin epäyhtälön nojalla. Koska $M(\infty)$ on jonon $M_n(\infty)$ raja-arvo avaruudessa $L^2(\Omega)$, joten voimme päätellä, että $\| M - M_n \| \to 0$. Siispä $\mathscr{M}^2$ on täydellinen. □

Voimme nyt osoittaa, että integraali jatkuvan lokaalin martingaalin suhteen on edelleen lokaali martingaali, jopa silloin, kun integrandi kuuluu luokkaan Π_3.

5.27. **Lemma.** *Jos $H \in \Pi_3$ ja X on jatkuva lokaali martingaali, niin niin $(H \cdot X)_t$ on jatkuva lokaali martingaali.*

Todistus. Palautamme väitteen aluksi helpommaksi väitteeksi, jonka mukaan $(H \cdot X)$ on jatkuva martingaali, jos $H \in \Pi_2$ ja X on rajoitettu jatkuva martingaali.

Silloin voimme käyttää pysäyttämistä eli asetamme

$$\tau_n = \inf\{\ t \ge 0 : \ \int_0^t H(s)\, \mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_s > n \text{ tai } X_t > n\ \}$$

Nyt $X_n := X^{\tau_n}$ on jatkuva rajoitettu martingaali, sillä $X^n(t) \le n$ jokaisella $t \ge 0$ jatkuvuuden nojalla. Lisäksi $H_n := H[\, t \le \tau_n \,]$ on ennustettava prosessi, jolle

$$\| H_n \|_{X^n} = \sup_{t \ge 0} \mathbf{E} \int_0^t (H_n(s))^2 \,\mathrm{d}\langle X_n \rangle(s) \le \mathbf{E} \int_0^{\tau_n} (H(s))^2 \,\mathrm{d}\langle X \rangle(s) \le n.$$

Siispä oletuksen mukaan $(H_n \cdot X_n)$ on jatkuva martingaali. Koska

$$(H \cdot X)_t^{\tau_n} = \int_0^{t \wedge \tau_n} H(s) \,\mathrm{d}X(s) = (H_n \cdot X_n)_t^{\tau_n},$$

ja koska $\tau_n \to \infty$ melkein varmasti, kun $H \in \Pi_3$, voimme tästä päätellä, että $(H \cdot X)$ on jatkuva lokaali martingaali.

Osoitamme vielä helpotetun väitteen, eli oletamme $H \in \Pi_2$ ja X on rajoitettu ja jatkuva martingaali. Koska $(H \cdot X) = \mathscr{I}(H)$, niin $(H \cdot X)$ on ainakin martingaali. Toisaalta tiedämme, että jos $(H_n) \subset b\Pi_1$ on approksimoiva jono, niin $(H_n \cdot X)$ on jatkuva jokaisella n. Nyt Doobin L^2-maksimaaliepäyhtälön mukaan

$$\mathbf{E} \sup_{0 \le s \le t} |(H_n \cdot X)_s - (H \cdot X)_s|^2 \le 4\mathbf{E}\, |(H_n \cdot X)_t - (H \cdot X)_t|^2 ,$$

joten $(H \cdot X)$ on tasaisena rajana jatkuvista prosesseista myöskin jatkuva. □

Viimeisenä yleistyksenä kasvatamme prosessiluokkaa, jonka suhteen voimme integroida, kun samalla hieman rajoitamme integroitavien prosessien luokkaa. Määrittelemme suurimman integroivien prosessien luokan seuraavasti.

5.28. **Määritelmä.** Sanomme, että (X_t) on *jatkuva semimartingaali*, jos $X_t = M_t + A_t$, missä M on jatkuva lokaali martingaali ja A jatkuva lokaalisti heilahteleva adaptoitu prosessi.

Jatkuvien semimartingaalien tapauksessa tämä jako martingaaliosaan ja rajoitetusti heilahtelevaan osaan on yksikäsitteinen.

5.29. **Lemma.** *Jos X on jatkuva semimartingaali, niin se voidaan yksikäsitteisesti esittää summana $X = M + A$, jos $A(0) = 0$.*

Todistus. Jos $X = M_1 + A_1 = M_2 + A_2$, niin $M_1 - M_2 = A_2 - A_1$ on jatkuva lokaali martingaali, joka on lisäksi rajoitetusti heilahteleva. Tiedämme, että tällöin $M_1 - M_2$ on vakio, joten $A_2 - A_1 = C$. Koska $A_1(0) = A_2(0)$, niin väite seuraa. □

Rajoittamalla integroitavien prosessien H luokka lokaalisti rajoitetusti heilahteleviin prosesseihin $lb\Pi$, voidaan integrointi yleistää jatkuvien semimartingaalien yli. Jätämme harjoitustehtäväksi miettiä, miksi $lb\Pi \subset \Pi_3$. Kun tiedämme tämän, niin tiedämme jo, mitä on $(H \cdot M)$, kun M on jatkuva lokaali martingaali. Jos määrittelemme

5.30. **Määritelmä.** Jos $H \in lb\Pi(X)$ ja A on jatkuva lokaalisti heilahteleva adaptoitu prosessi, niin prosessin H stokastinen integraali prosessin A suhteen on

$$(H \cdot A)(\omega, t) := \int_0^t H(s, \omega)\, \mathrm{d}A(s, \omega),$$

kun integraali määritellään melkein varmasti poluittain Lebesguen–Stieltjesin integraalina.

Yhdistämällä nämä tiedot ja soveltamalla Lemmaa 5.29, voimme hyvin määritellä stokastisen integraalin myös semimartingaalin suhteen.

5.31. **Määritelmä.** Jos $H \in lb\Pi(X) \subset \Pi_3$ ja $X = M + A$ on jatkuva semimartingaali ja $A(0) = 0$, niin niin prosessin H stokastinen integraali semimartingaalin X suhteen on

$$(H \cdot X)_t := (H \cdot M)_t + (H \cdot A)_t$$

Olemme nyt määritelleet kaikki stokastisen integroinnin käsitteet, mitä tarvitsemme. Osoitamme vielä puuttuvat palaset eli Lauseen 5.18 sekä Lemman 5.20 yleistyksen.

5.3. **Lauseen 5.18 todistus.** Jakson 5.1 alun esimerkissä tarkastelimme, kuinka määrittelisimme Brownin liikkeen integraalin itsensä suhteen. Päädyimme tarkastelemaan satunnaismuuttujien summaa

$$Y_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (\nabla_+ B(t_k))^2,$$

missä $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = t$. Tuolloin päättelimme suurten lukujen lain nojalla suppenevan melkein varmasti kohti kasvavaa funktiota $\langle B \rangle_t = t$. Olimme jo aikasemmin todenneet, että $B(t)^2 - \langle B \rangle_t$ on martingaali, joten tiedämme varianssiprosessin olemassaolon ainakin Brownin liikkeen tapauksessa.

Näytämme seuraavaksi, että voimme yleisestikin esittää varianssiprosessin raja-arvona lisäysten neliöistä. Kuten aiemminkin, riittää olettaa, että X jatkuva ja rajoitettu martingaali (HT miksi?). Tämän avulla määrittelmme melkein kasvavan prosessin

$$\begin{aligned}A_n(X)(t) := A_n(t) := \sum_{k\geq 0}\Big((\nabla_+ X)(t_{k,n})^2[\,t_{k+1,n} < t\,] \\ + (X(t) - X(t_{k,n}))^2[\,t_{k,n} < t \leq t_{k+1,n}\,]\Big),\end{aligned}$$

missä $t_{k,n} := k2^{-n}$. Tämä jatkuva prosessi täyttää jo lähes varianssiprosessin $\langle\, X\,\rangle$ tarpeet, sillä $A_n(0) = 0$ ja prosessi $M_n := X^2 - A_n$ on jatkuva martingaali. Tämän havaitsemme laskemalla, sillä kun $s < u < v$, niin martingaaliominaiusuuden avulla havaitsemme, että (HT)

$$\mathbf{E}\,\Big((X(u) - X(v))^2 \,|\, \mathscr{F}_s\Big) = \mathbf{E}\,\Big(X(u)^2 - X(v)^2 \,|\, \mathscr{F}_s\Big)$$

ja kun $u \leq s < v$, niin

$$\mathbf{E}\,\Big((X(u) - X(v))^2 \,|\, \mathscr{F}_s\Big) = \mathbf{E}\,\Big(X(u)^2 - X(s)^2 \,|\, \mathscr{F}_s\Big) + (X(s) - X(v))^2$$

Tämä pieni muutos muuttaa edellisen summan teleskoopisummaksi, joten kun $t > s$ ja $\widehat{t} = 2^n\,\lfloor t2^{-n}\rfloor$ ja $\widehat{s} = 2^n\,\lfloor s2^{-n}\rfloor$ ja $\widehat{s}^+ = \widehat{s} + 2^{-n}$, niin

$$\sum_k \mathbf{E}\,\Big((\nabla_+ X)(t_{k,n})^2 \,|\, \mathscr{F}_s\Big)\,[\,\widehat{s}^+ \leq t_{k,n} < \widehat{t}\,] = \mathbf{E}\,\Big(X(\,\widehat{t}\,)^2 - X(\widehat{s}^+)^2 \,|\, \mathscr{F}_s\Big)\,.$$

Summan alkuosaan ehdollistaminen ei vaikuta, joten

$$\sum_k \mathbf{E}\,\Big((\nabla_+ X)(t_{k,n})^2 \,|\, \mathscr{F}_s\Big)\,[\,t_k < \widehat{s}^+\,] = A_n(s) - (X(s) - X(\widehat{s}^+))^2.$$

Nyt summasta puuttuu enää termit $(X(\widehat{s}^+) - X(\widehat{s}))^2$ ja $(X(t)^2 - X(\,\widehat{t}\,))^2$, joten kaiken kaikkiaan

$$\mathbf{E}\,(A_n(t) \,|\, \mathscr{F}_s) = A_n(s) + \mathbf{E}\,\Big(X(t)^2 \,|\, \mathscr{F}_s\Big) - X(s)^2 = \mathbf{E}\,\Big(X(t)^2 \,|\, \mathscr{F}_s\Big) - M_n(s).$$

Ryhmittelemällä termit havaitsemme, että $\mathbf{E}\,(M_n(t) \,|\, \mathscr{F}_s) = M_n(s)$, joten M_n on martingaali. Koska prosessi on adaptoitu määritelmänsä nojalla ja lisäksi jatkuva, on se myös ennustettava. Jokin ominaisuus täytyy kuitenkin puuttua, sillä muuten Lauseen 5.18 yksikäsitteisyys jää puuttumaan. Tämä puuttuva ominaisuus on kasvavuus. Vaikka summammekin koko ajan positiivisia lukuja keskenään, niin kun t on välillä $(t_{k,n}, t_{k+1,n})$, niin prosessi $A_n(t)$ käyttäytyy kuten $(X(t) - X(t_{k,n}))^2$, mikä ei varmasti ole kasvava, jos X ei ole vakio.

Toisaalta tiedämme kuitenkin, että $k \mapsto A(t_{k,n})$ on kasvava, joten kasvavuuskin on ”melkein” voimassa ja jos näillä prosesseilla on jatkuva raja-arvo, niin voimme tämän avulla jo päätellä, että sen täytyy olla kasvava.

Voimme päätellä myös yksikäsitteisyyden, jos tiedämme raja-arvon olemassaolon.

5.32. **Lemma.** *Jos jokaisella jatkuvalla ja rajoitetulla martingaalilla X varianssiprosessin approksimaatio $A_n(X)$ suppenee kohti raja-arvoa $A(X)$ ja K on jokin varianssiprosessin ehdot täyttävä prosessi, niin $A(X) = K$.*

Todistus. Oletetaan, että K_1 ja $K_2 = A(X)$ ovat kaksi ehdot toteuttavaa jatkuvaa ja kasvavaa adaptoitua prosessia. Tällöin $M_1 := X^2 - K_1$ ja $M_2 := X^2 - K_2$ olisivat jatkuvia martingaaleja ja $M := M_1 - M_2 = K_2 - K_1$ olisi lokaalisti rajoitetusti heilahteleva martingaali. Voisimme siten soveltaa edellistä summa-approksimointia martingaaliin M. Nyt

$$|A_n(M)(t_{K,n})| \leq \sup_{k<K} |\nabla_+ M(t_{k,n})| \sum_{k<K} |\nabla_+ M(t_{k,n})| \leq C \sup_{k<K} |\nabla_+ M(t_{k,n})|$$

jollakin vakiolla C, joka ei riipu luvusta n. Koska M on jatkuva, niin voimme päätellä, että raja $A(M)(t) = 0$ jokaisella t. Siispä M^2 on jo itsessään martingaali ja siten

$$\mathbf{E}\, M_t^2 = \mathbf{E}\, M_0^2 = C_1 \geq 0$$

on positiivinen vakio. Toisaalta $M(0) = K_2(0) - K_1(0) = 0$, joten luku $C_1 = 0$. Siispä $M_t^2 = 0$ melkein varmasti ja siten myös $M_t = 0$. Koska $K_1 - K_2 = M = 0$, niin $K_1 = K_2 = A(X)$. □

Voimme nyt hyvillä mielin jatkaa raja-arvon olemassaolon näyttämistä, sillä se takaa paljon mukavaa tietoa. Todistus pohjautuu tärkeään huomioon, eli siihen että $M_n = X^2 - A_n$ on rajoitettu jatkuva martingaali jokaisella n. Siispä $M_{n,m} := M_n - M_m = A_m - A_n$ on myös rajoitettu ja jatkuva martingaali jokaisella n, m. Voimme siten tarkastella jonon (A_n) suppenemisen sijasta jonon (M_n) suppenemista ja tähän voimme silloin soveltaa martingaalien ominaisuuksia.

Jos näytämme, että *kiinteällä* $t \in T$ jono $(M_n(t))$ suppenee kohti satunnaismuuttujaa $M(t)$ ainakin avaruudessa $L^2(\Omega)$, niin vastaavasti $A_n(t) = X^2(t) - M_n(t) \to X^2(t) - M(t) =: A(t)$. Lisäksi Doobin maksimaaliepäyhtälön nojalla tiedämme, että $(M_n(s))$ suppenee tasaisesti äärellisillä suljetuilla väleillä $[0, t]$. Siispä voimme päätellä, kuten aiemminkin, että M on jatkuva, joten $A = X^2 - M$ on jatkuva myöskin.

Tehtäväksi on jäänyt enää osoittaa, että (M_n) tai vastaavasti (A_n) on Cauchyn jono L^2-normin suhteen. Jos (A_n) on Cauchyn jono, niin se on aina myös rajoitettu. Näytämme kohta, että tällä kertaa nämä väitteet ovat itse asiassa yhtäpitäviä, eli jos $\| A_n \| \leq C$ jokaisella n, niin (A_n) on Cauchyn jono.

Lauseen 5.18 lopulliseksi osoittamiseksi riittää tämän jälkeen enää osoittaa, että $\mathbf{E}\, A_n^2 \leq C$. Tämä näyttää sellaiselta väitteeltä, että sen osoittaminen pitäisi olla varsin suoraviivainen.

Koko lauseen todistuksesta uupuu enää kaksi seikkaa:

i) jos $\sup_n \mathbf{E}\, A_n^2(t) \;\le C$ jollakin $C > 0$, niin jono $(A_n(t))$ on Cauchyn jono,

ii) jollakin $C > 0$ on $\mathbf{E}\, A_n^2(t) \;\le C$ jokaisella n

Aloitamme kohdasta *i*) ja yritämme johtaa arvion

$$\mathbf{E}\,(A_n(t) - A_m(t))^2 \;\le f(n,m)\sqrt{\mathbf{E}\, A_n^2(t)}$$

kun $n \ge m$ ja missä f on funktio, joka häviää, kun $n, m \to \infty$. Tämä luonnollisesti implikoisi kohdan *i*).

Koska $A_n - A_m = M_{m,n}$, niin

$$\mathbf{E}\,(A_n(t) - A_m(t))^2 \;= \mathbf{E}\, M_{m,n}^2(t) \;= \mathbf{E}\, A_n(M_{m,n})(t)$$

alkuosan perusteella. Jos muokkaamme hieman jonoa $t_{k,n}$ siten, että $t =: t_{k+1,n}$, kun $\lfloor t/2^n \rfloor = K$ ja jos lisäksi kirjoitamme $t_j := t_{j,n}$, niin

$$\begin{aligned} A_n(M_{m,n})(t) &= \sum_j (\nabla_+ A_n - \nabla_+ A_m)^2(t_j) \le 2\sum_j (\nabla_+ A_n(t_j))^2 + \nabla_+ A_m(t_j))^2 \\ &= 2\Big(A_n(A_n)(t) + A_n(A_m)(t)\Big) \end{aligned}$$

Koska $\nabla_+ A_n(t_j) = (\nabla_+ X(t_j))^2$, niin

$$A_n(A_n)(t) = \sum_j (\nabla_+ X(t_j))^4 \le \sup_j (\nabla_+ X(t_j))^2 A_n(t)$$

Siispä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\mathbf{E}\, A_n(A_n(t)) \;\le \Big(\mathbf{E}\,\sup_j (\nabla_+ X(t_j))^4\Big)^{1/2}\sqrt{\mathbf{E}\, A_n(t)^2} \;=: f_1(n,n)\sqrt{\mathbf{E}\, A_n(t)^2}\,.$$

Ensimmäinen termi on siis käsitelty. Olkoon $2^k \le j2^{k+1}$ ja merkitään $s_j := 2^{k-n}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \nabla_+ A_m(t_j) &= (X(t_{j+1}) - X(s_j))^2 - (X(t_j) - X(s_j))^2 \\ &= \nabla_+ X(t_j)(X(t_{j+1}) + X(t_j) - 2X(s_j)), \end{aligned}$$

joten vastaavasti saamme

$$A_n(A_m)(t) \le \sup_j (X(t_{j+1}) + X(t_j) - 2X(s_j))^2 A_n(t),$$

joten Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön avulla voimme kirjoittaa myös tämän termin odotusarvon muodossa

$$\mathbf{E}\, A_n(A_m)(t) \le f_2(n,m)\sqrt{\mathbf{E}\, A_n(t)^2}$$

missä termit $f_2(n,m) \to 0$, kun $n, m \to \infty$ prosessin X jatkuvuuden ja rajoittuneisuuden nojalla (eli voimme käyttää rajoitetun suppenemisen lausetta).

Olemme nyt osoittaneet kohdan *i*). Kohdan *ii*) osoituksessa käytämme hyväksi tätä todistusta. Nyt

$$\begin{aligned} A_n(t)^2 &= \Big(\sum_k (\nabla_+ X(t_k))^2\Big)^2 = \sum_k (\nabla_+ X(t_k))^4 + 2\sum_{k>j} (\nabla_+ X(t_k))^2 (\nabla_+ X(t_j))^2 \\ &= \sum_{0\le t_k<t} (\nabla_+ X(t_k))^4 + 2 \sum_{0<t_k<t} (\nabla_+ X(t_k))^2 A_n(t_k) \\ &=: I_n + J_n \end{aligned}$$

Laskemme nyt odotusarvon termistä J. Koska

$$\mathbf{E}\left((\nabla_+ X(t_k))^2 \,|\, \mathscr{F}_{t_k}\right) = \mathbf{E}\left(X(t_{k+1})^2 - X(t_k)^2 \,|\, \mathscr{F}_{t_k}\right),$$

niin

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\, J &= 2\mathbf{E} \sum_{0\le t_k<t} \nabla_+ (X(t_k)^2) A(t_k) \\ &= 2\mathbf{E}\, X(t)^2 A(t^-) \; - 2\mathbf{E} \sum_{0\le t_k<t} X(t_k)^2 (\nabla_+ X(t_{k-1}))^2 . \end{aligned}$$

Voimme arvioida tätä termiä käyttämällä hyväksi tietoa, että $\| X \|_\infty \le C_1$, saamme

$$\mathbf{E}\, J \le 2C_1^2 \mathbf{E}\, A(t) + 2C_1^2 \mathbf{E} \sum_{0<t_k<t} (\nabla_+ X(t_{k-1}))^2 \le 4C_1^2 \mathbf{E}\, A(t)$$

Ensimmäistä termiä I arvioimme jo kohdassa *i*), joten tiedämme, että

$$\mathbf{E}\, I \le 4C_1^2 \mathbf{E}\, A_n(t),$$

joten kaiken kaikkiaan $\mathbf{E}\, A_n(t)^2 \le 8C_1^2 \mathbf{E}\, A_n(t)$. Olemme palauttaneet väitteen siihen, että $\mathbf{E}\, A_n(t)$ on rajoitettu. Mutta tämä on helppo lasku, sillä

$$\mathbf{E}\, A_n(t) = \mathbf{E} \sum_{0\le t_k<t} \nabla_+ (X(t_j)^2) = \mathbf{E}\left(X(t)^2 - X(0)^2\right) \le C_1^2$$

Tämä osoittaa väitteen ja päättää varianssiprosessin olemassaolo- ja yksikäsitteisyystodistuksen.

5.4. **Kunitan–Watanaben epäyhtälö ja Lemman 5.20 yleistys.** Analyysistä sekä jo edellisen kappaleen todistuksista tiedämme, että Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö on hyvin keskeinen työkalu kaikessa. Kunitan–Watanaben epäyhtälö on Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön vastine stokastisessa integroinnissa. Muotoillaan Kunitan–Watanaben epäyhtälö ensin varsin yleisessä muodossa ja osoitetaan sen avulla Lemman 5.20 yleistys.

5.33. **Lause** (Kunitan–Watanaben epäyhtälö)**.** *Jos X ja Y ovat jatkuvia lokaaleja martingaaleja ja H ja K mitallisia prosesseja, niin melkein varmasti*

$$\int_0^\infty |H(s)K(s)| |\, \mathrm{d}\langle X, Y\rangle_s| \le \Big(\int_0^\infty |H(s)|^2 \,\mathrm{d}\langle X\rangle_s\Big)^{\frac12} \Big(\int_0^\infty |K(s)|^2 \,\mathrm{d}\langle Y\rangle_s\Big)^{\frac12},$$

missä $|\,\mathrm{d}\langle\, X, Y\,\rangle_s|$ *on kovarianssiprosessin variaatioprosessin* V_s *määräämä mitta.*

Edellisessä saatoimme olettaa, että $(s,\omega)\mapsto H(s,\omega)$ (vastaavasti K:lle) on pelkästään $\mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{F}$-mitallinen. Tämä on huomattavasti vähemmän kuin mitä olemme tähän saakka olettaneet, sillä esimerkiksi kaikki optionaaliset prosessit toteuttavat tämän.

Koska $\langle\, X, Y\,\rangle_s$ on kahden kasvavan jatkuvan ennustettavan prosessin K_1 ja K_2 erotus, niin olisimme voisimme määritellä $|\,\mathrm{d}\langle\, X, Y\,\rangle_s| := \frac{1}{4}(\,\mathrm{d}\langle\, X+Y\,\rangle_s + \mathrm{d}\langle\, X-Y\,\rangle_s)$

Tämän avulla voimme todistaa Lemman 5.20 yleistyksen

5.34. **Lause.** *Jos* $H\in\Pi_3(X)$, $K\in\Pi_3(Y)$ *ja* X *ja* Y *ovat jatkuvia lokaaleja martingaaleja, niin*

$$\langle\, H\cdot X, K\cdot Y\,\rangle_t = \int_0^t H(s)K(s)\,\mathrm{d}\langle\, X, Y\,\rangle_s.$$

Todistus. Haluamme siis osoittaa, että

$$M_t := (H\cdot X)_t(K\cdot Y)_t - \int_0^t H(s)K(s)\,\mathrm{d}\langle\, X, Y\,\rangle_s \tag{5.35}$$

on lokaali martingaali. Pysäyttämällä voimme helpottaa oletuksia jo tuntuvasti. Haluaisimme, että $H\in\Pi_2(X)$, $K\in\Pi_2(Y)$ ja että X ja Y olisivat rajoitettuja martingaaleja, joten määrittelemme

$$\tau_n = \inf\{\, t>0:\ |X_t|\vee|\,Y_t|\vee\int_0^t |H_s|^2\,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_s \vee \int_0^t |K_s|^2\,\mathrm{d}\langle\, Y\,\rangle_s > n\,\},$$

mikä on neljän pysähdyshetken miniminä pysähdyshetki. Koska $\tau_n\to\infty$, ja integrointi käyttäytyy mukavasti pysäytyksen suhteen, niin riittää, että M_t on rajoitettu martingaali kun $H\in\Pi_2(X)$, $K\in\Pi_2(Y)$ ja X sekä Y ovat rajoitettuja jatkuvia martingaaleja.

Approksimoimme prosesseja H ja K rajoitetuilla yksinkertaisilla ennustettavilla prosesseilla $(H_n),(K_n)\subset b\Pi_1$. Olkoon

$$M_n(t) := (H_n\cdot X)_t(K_n\cdot Y)_t - \int_0^t H_n(s)K_n(s)\,\mathrm{d}\langle\, X, Y\,\rangle_s.$$

Nyt Lemman 5.20 nojalla M_n on jatkuva martingaali jokaisella n. Haluamme nyt osoittaa, että kun $n\to\infty$, niin $M_n(t)\to M(t)$ ja että myös $M(t)$ on martingaali.

Osoitamme ensin, että $(H_n\cdot X)_t(K_n\cdot Y)_t\to(H\cdot X)_t(K\cdot Y)_t$ avaruudessa L^1. Itse asiassa osoitamme paljon enemmän, sillä osoitamme, että

$$I_1(n) := \mathbf{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\big|(H_n\cdot X)_s(K_n\cdot Y)_s - (H\cdot X)_s(K\cdot Y)_s\big|\Big)\to 0.$$

Lisäämällä ja vähentämällä $(H\cdot X)_t(K_n\cdot K)$ ja soveltamalla kolmioepäyhtälöä saamme

$$\begin{aligned} I_1(n) &\le \mathbf{E}\sup_{0\le s\le t}|((H_n-H)\cdot X)_s(K_n\cdot Y)_s| \\ &\quad+\mathbf{E}\sup_{0\le s\le t}|(H\cdot X)_s((K_n-K)\cdot Y)_s|, \end{aligned}$$

niin voimme soveltaa Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä, ja sen jälkeen Doobin maksimaaliepäyhtälöäsaamme

$$\begin{aligned} I_1(n) &\le \sqrt{\mathbf{E}\sup_{s\le t}((H_n-H)\cdot X)_s^2\,\mathbf{E}\sup_{s\le t}(K_n\cdot Y)_s^2} \\ &\quad+\sqrt{\mathbf{E}\sup_{s\le t}(H\cdot X)_s^2\,\mathbf{E}\sup_{s\le t}((K_n-K)\cdot Y)_s^2} \\ &\le 4\|\,(H_n-H)\cdot X)\,\|\|\,K_n\cdot Y\,\|+4\|\,(H\cdot X)\,\|\|\,(K_n-K)\cdot Y\,\|, \end{aligned}$$

missä normi $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{\mathscr{M}^2}$. Isometriaominaisuuden nojalla

$$I_1(n)\le \|\,H_n-H\,\|_X\|\,K_n\,\|_Y+\|\,H\,\|_X\|\,K_n-K\,\|_Y\to 0$$

joten ainakin $(H_n\cdot X)_t(K_n\cdot Y)_t\to(H\cdot X)_t(K\cdot Y)_t$ avaruudessa $L^1(\Omega)$. Tiedämme jo ennelta, että $(H\cdot X)_t(K\cdot Y)_t$ on jatkuva. Jäljellä oleva integraali kovarianssiprosessin suhteen hoituu nyt Kunitan–Watanaben epäyhtälöllä, sillä

$$\begin{aligned} I_2(n,t) &:= \left|\int_0^t H_n(s)K_n(s)\,\mathrm{d}\langle X,Y\rangle_s-\int_0^t H(s)K(s)\,\mathrm{d}\langle X,Y\rangle_s\right| \\ &\le \int_0^t|H_n(s)-H(s)||K_n(s)|\,\mathrm{d}|\langle X,Y\rangle_s| \\ &\quad+\int_0^t|K_n(s)-K(s)||H(s)|\,\mathrm{d}|\langle X,Y\rangle_s| \\ &\le \Big(\int_0^\infty|H_n(s)-H(s)|^2\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^\infty|K_n(s)|^2\,\mathrm{d}\langle Y\rangle_s\Big)^{\frac12} \\ &\quad+\Big(\int_0^\infty|K_n(s)-K(s)|^2\,\mathrm{d}\langle Y\rangle_s\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^\infty|H(s)|^2\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s\Big)^{\frac12} \end{aligned}$$

joten

$$\mathbf{E}\sup_{s\le t}I_2(n,s)\ \le\|\,H_n-H\,\|_X\|\,K_n\,\|_Y+\|\,K_n-K\,\|_Y\|\,H\,\|_X\to 0$$

Siispä

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\sup_{s\le t}|M_n(s)-M(s)|\ =0,$$

joten M on myös jatkuva. Jensenin epäyhtälön nojalla voimme päätellä edelleen, että

$$\mathbf{E}\,|\mathbf{E}\ (M_n(t)-M(t)\,|\,\mathscr{F}_s)\,|\ \le \mathbf{E}\,|M_n(t)-M(t)|\ \to 0$$

joten $\mathbf{E}\,(M(t)\,|\,\mathscr{F}_s) = \lim_n \mathbf{E}\,(M_n(t)\,|\,\mathscr{F}_s) = \lim_n M_n(s) = M(s)$, joten M on martingaali. $\square$

Osoitamme nyt Kunitan–Watanaben epäyhtälön.

Kunitan–Watanaben epäyhtälön todistus. Osoitamme tämän paloissa yleistämällä integroitavia prosesseja askel askeleelta yleisemmiksi. Koska yleistäminen on redusointia takaperin, voimme myös redusoida ongelmaa helpommaksi askel askeleelta.
Voimme olettaa, että $|H|, |K| \leq M$ ovat rajoitettuja ja $H(s) = K(s) = 0$ jokaisella $s \geq \tau$, kun $\langle X \rangle_\tau \geq M$ tai $\langle Y \rangle_\tau \geq M$. Jos nimittäin tiedämme väitteen tässä tapauksessa, niin alkuperäinen väite seuraa monotonisen suppenemisen lauseella, sillä huomaamme, että pysähdyshetki $\tau = \inf\{\ t > 0 :\ \langle X \rangle_t \vee \langle Y \rangle_t > M\ \}$ kasvaa rajoittamatta, kun $M \to \infty$.
Riittää osoittaa väite yksinkertaisille mitallisille prosesseille H ja K. Jos nimittäin tiedämme, että väite pitää paikkaansa yksinkertaisille prosesesseille ja olemme jo olettaneet, että mitat $\langle X \rangle$ ja $\langle Y \rangle$ ovat äärellisiä, joten rajoitetun konvergenssin lause takaa, että väite pitää paikkaansa rajoitetuille mitallisille prosesesseille.
Riittää osoittaa, että yksinkertaisille prosesseille H ja K pätee

$$(*) \qquad \left| \int_0^\infty H(s)K(s)\,\mathrm{d}\langle X, Y \rangle_s \right| \leq N(H, X)N(K, Y),$$

kun

$$N(H, X)^2 := \int_0^\infty |H(s)|^2\,\mathrm{d}\langle X \rangle_s.$$

Tämän näkeminen vaatii hieman tietoja variaatiomitoista. Merkitsemme prosessilla $V(t)$ kovarinassiprosessin variaatioprosessia. Tämä tarkoittaa, että

$$V(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_k |\nabla_+ \langle X, Y \rangle(t_{k,n})|[\,t_{k,n} < t\,] =: \lim_{n\to\infty} V_n(t)$$

sopivasti valitulla välin $[0, t]$ jaolla $(t_{k,n})$. Etukäteen nämä jaot voivat siis riippua t:stä, mutta emme tarvitse mitään syvällisiä tuloksia juuri nyt. Jos edellisessä ei olisi itseisarvoja, niin summa redusoituisi aina kovarianssiprosessiksi. Määritelläänkin yksinkertaiset *mitalliset* prosessit $J_n(s)$ seuraavasti,

$$J_n(t) = -1 + 2\sum_k [\,\nabla_+ \langle X, Y \rangle(t_{k,n}) \geq 0, t_{k,n} \leq t < t_{k+1,n}\,]$$

joka on siten -1 kun väleillä, missä kovarianssiprosessi heilahtaa alaspäin ja 1 muuten. Huomaamme myös, että J_n ei ole ennustettava eikä edes optionaalinen, joten tämä kohta on eräs syy, miksi Kunitan–Watanaben epäyhtälömuotoiltiin niin yleisille integroitaville prosesseille. Näiden avulla voimme kirjoittaa, että

$$V_n(t) = \sum_k \nabla_+\langle X, Y\rangle(t_{k,n})J_n(t_{k,n})[\, t_{k,n} < t\,] = \int_0^t J_n(s)\,\mathrm{d}\langle X, Y\rangle_s$$

Jos H ja K ovat yksinkertaisia mitallisia prosesseja, niin

$$\begin{aligned}\int |H(s)K(s)|\,\mathrm{d}V(s) &= \sum_j |h_jk_j|(V(b_j) - V(a_j))\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_j |h_jk_j|(V_{n_k}(b_j) - V_{n_k}(a_j))\\ &= \lim_{n\to\infty} \int |H(s)K(s)|J_n(s)\,\mathrm{d}\langle X, Y\rangle_s\end{aligned}$$

Jos tiedämme kaavan $(*)$, niin tällöin voimme soveltaa sitä yksinkertaisiin prosesseihin $H'(s) = |H(s)|$ ja $K'_n(s) = |K(s)|J_n(s)$. Siispä

$$\begin{aligned}\int |H(s)K(s)|\,\mathrm{d}V(s) &= \lim_{n\to\infty} \Big|\int_0^t H'(s)K'_n(s)\,\mathrm{d}\langle X, Y\rangle_s\Big|\\ &\le \lim_{n\to\infty} N(H', X)N(K'_n, Y)\\ &\le \lim_{n\to\infty} N(H, X)N(K, Y)\\ &\le N(H', X)N(K, Y).\end{aligned}$$

Käytimme päätelmässä hyväksi sitä, että $N(H', X) = H(H, X)$ ja että

$$N(K'_n, Y) = \int |K'_n(s)|^2\,\mathrm{d}\langle Y\rangle_s = \int |K(s)|^2\,\mathrm{d}\langle Y\rangle_s = N(K, Y).$$

Riittää osoittaa, että $\nabla_+\langle X, Y\rangle^2_{t_k} \le \nabla_+\langle X\rangle_{t_k}\nabla_+\langle Y\rangle_{t_k}$ mille tahansa välin $[0, t]$ jaolle (t_k). Jos nimittäin tiedämme tämän, niin jos H ja K ovat kaksi yksinkertaista mitallista prosessia, niin voimme löytää välin $[0, t]$ jaon $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n = t$ ja satunnaismuuttujat (W_j) sekä (Z_j), joille

$$H(s) = \sum_j W_j[\, s \in [t_j, t_{j+1})\,] \quad \text{ja} \quad K(s) = \sum_j Z_j[\, s \in [t_j, t_{j+1})\,].$$

Tällöin kolmioepäyhtälön ja kovarianssiprosessin hajotelmatiedon nojalla

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^t H(s)K(s)\,\mathrm{d}\langle X, Y\rangle_s\Big| &\le \sum_k |W_kZ_k||\nabla_+\langle X, Y\rangle(t_k)|\\ &\le \sum_k |W_k|\Big(\nabla_+\langle X\rangle(t_k)\Big)^{\frac12}|Z_k|\Big(\nabla_+\langle Y\rangle(t_k)\Big)^{\frac12}\end{aligned}$$

joten Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön avulla voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^t H(s)K(s)\,\mathrm{d}\langle X, Y\rangle_s\Big|^2 &\le \sum_k |W_k|^2\nabla_+\langle X\rangle(t_k) \sum_k |Z_k|^2\nabla_+\langle Y\rangle(t_k)\\ &\le \int_0^t |H_s|^2\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s \int_0^t |K_s|^2\,\mathrm{d}\langle Y\rangle_s\end{aligned}$$

Olemme siten redusoineet väitteen siihen, että

$$(\langle X, Y \rangle_t - \langle X, Y \rangle_s)^2 \leq (\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s)(\langle Y \rangle_t - \langle Y \rangle_s)$$

kaikilla $t \geq s$. Tämän osoittaminen jää hajoitustehtäväksi (HT). $\square$