5. Stokastinen integrointi

Olemme lopulta käyneet läpi tarvittavat tiedot peruskäsitteistä ja voimme aloittaa stokastisen integroinnin (ja siten stokastisen derivoinnin) määrittelemisen. Aloitamme helpoimmista tapauksista ensin ja laajennamme käsitettä, kunnes se on tarpeisiimme riittävä.

5.1. **Stokastinen integrointi Brownin liikkeen suhteen.** Ihan aluksi käymme käsiksi integrointiin yksiulotteisen Brownin liikkeen suhteen. Reuna-arvotehtävän diskreetistä versiosta havaitsemme, että tarvittavan yleistyksen tulisi toteuttaa ehto:

$$\mathbf{E} \int_0^\tau H(t)\,\mathrm{d}B(t) \;= 0$$

pysähdyshetkillä τ. Toisaalta, jos stokastinen integraali on ainakin càdlàg–prosessi, niin tiedämme, että tämä on yhtäpitävää martingaalioletuksen nojalla. Haluamme siis, että stokastinen integraali on martingaali. Olemme aiemmin todenneet, että stokastinen integraali ei voi olla täysin perinteistä integraalia vastaava ja Kiyoshi Itōn kaunis ajatus olikin, että integroitavien prosessien luokkaa on hieman rajoitettava, jotta kunnollinen integroinnin teoria on muotoiltavissa. Seuraava esimerkki selventänee siten jatkossa tehtäviä rajoituksia.

5.1. **Esimerkki.** Palaamme kysymykseen, mitä on

$$\int_0^t B_s\,\mathrm{d}B_s\,?$$

Jos diskretoimme ajan tasavälein $h = t/n$ ja merkitsemme $t_k := kh$, niin perinteisen Riemannin–Stieltjesin integraalin määritelmän nojalla vastaus saadaan raja-arvona summista

$$\sum_k B(s_k)(B(t_{k+1}) - B(t_k)),$$

kun $t_k \leq s_k \leq t_{k+1}$ on vapaasti valittu piste. Koska integroitava on jatkuva, niin Lebesguen–Stieltjesin integraali antaisi kuitenkin saman vastauksen. Funktionaalianalyysin perustuloksen (eli ns. tasaisen rajoituksen periaatteen) mukaan tämä ei voi onnistua, joten jotain muuta on tehtävä.

Yksinkertainen ratkaisu on: ei sallita pisteen s_k vapaata valintaa, vaan valitaan se joka kerta tarkalleen saman säännön mukaan. Eräs sääntö olisi: $s_k = t_k$ jokaisella k. Muita helppoja sääntöjä olisi $s_k = t_{k+1}$ tai $s_k = \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1})$. Katsotaan, mitä tapahtuu, jos valitsemme säännön $s_k = t_{k+1}$. Tällöin tarkastelemme siis summien

$$X_n(t) := \sum_{k=0}^{n-1} B(t_{k+1})(B(t_{k+1}) - B(t_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} B(t_{k+1})\nabla^- B(t_{k+1})$$

rajakäytöstä. Ensimmäinen mitä voimme laskea, on rajan odotusarvo. Koska

$$\mathbf{E}\, X_n(t) = \sum_k \big(\mathbf{E}\,(\nabla^+ B(t_k))^2 + \mathbf{E}\, B_{t_k} \nabla^+ B(t_k)\big)$$

niin $\mathbf{E}\,(\nabla^+ B(t_k))^2 = h$ ja $\mathbf{E}\, B_{t_k} \nabla^+ B(t_k) = 0$, joten

$$\mathbf{E}\, X_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} h = nh = t$$

eli ainakaan tällöin raja ei voi olla martingaali. Toisaalta käytimme hyväksi sitä, että valinta $s_k = t_k$ johtaa siihen, että

$$W_n(t) := \sum_{k=0}^{n-1} B(t_k)(B(t_{k+1}) - B(t_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} B(t_k)\nabla^+ B(t_k)$$

käyttäytyy ainakin odotusarvon suhteen oikealla tavalla, sillä $\mathbf{E}\, W_n(t) = 0$ jokaisella n. Voimme itse asiassa laskea tarkasti nämä summat. Käytämme hyväksi *Abelin summausta* eli summaamme osittain, jonka mukaan

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \nabla^+ b_k = a_{n-1} b_n - a_0 b_0 - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \nabla^- a_k$$

jos $a_k = B(t_k) = b_k$, niin vasen puoli on $W_n(t)$. Oikealla puolella oleva summa taas on

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} B(t_k)\nabla^- B(t_k) &= \sum_{k=0}^{n-2} B(t_{k+1})\nabla^- B(t_{k+1}) = X_n(t) - B(t_n)\nabla^- B(t_n) \\ &= W_n(t) + Y_n(t) - B(t_n)\nabla^- B(t_n)\end{aligned}$$

missä

$$Y_n(t) := \sum_{k=0}^{n-1} (\nabla^+ B(t_k))^2$$

joten saamme yhtälön

$$W_n(t) = B(t_{n-1})B(t_n) + B(t_n)(B(t_n) - B(t_{n-1})) - W_n(t) - Y_n(t),$$

joten voimme ratkaista yhtälöstä termin W_n ja saamme

$$W_n(t) = \tfrac{1}{2} B(t)^2 - \tfrac{1}{2} Y_n(t).$$

Jälkimmäinen termi on riippumattomattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien summa ja jos katsomme tarkemmin, niin $\nabla^+ B(t_n) \sim \sqrt{h} B(1)$, joten jos $\xi_n = (\nabla^+ B(t_n)/\sqrt{h})^2$, niin (ξ_n) on riippumattomia ja samoin jakautuneita, ja niiden odotusarvo $\mathbf{E}\, \xi_1 = 1$ ja

$$Y_n(t) = h \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = t\Big(\frac{1}{n} \sum_k \xi_k\Big) \to t$$

melkein varmasti suurten lukujen lain nojalla. Siispä myös $W_n(t) \to W(t) := \frac{1}{2}B(t)^2 - \frac{1}{2}t$ melkein varmasti. Tämän avulla voimme myös päätellä, että $X_n(t) \to \frac{1}{2}B(t)^2 + \frac{1}{2}t$ melkein varmasti. Aikaisemman esimerkin nojalla tiedämme, että $W(t)$ on martingaali Brownin liikkeen historian suhteen, joten valinta $s_k = t_k$ valinta vaikuttaa sopivalta strategialta.

Jatkossa $(\mathscr{F}_t)$ on Brownin liikkeen (täydennetty) historia. Tämän esimerkin motivoimana määrittelemme (mukaellen Durretin merkintojä)

5.2. **Määritelmä.** Sanomme, että prosessi H_s on *elementaarinen optionaalinen prosessi*, jos

$$H(s,\omega) = C(\omega)[\, s \in [a,b)\,]$$

kun $a < b$ ja C on $\mathscr{F}_a$-mitallinen. Merkitsemme tällöin, että $H \in \Lambda_0$.

Jos hetken mietimme, mitä integroinnin tulisi tarkoittaa, niin varmastikin seuraavan tulisi toteutua.

5.3. **Alustava määritelmä.** Kun $H(s,\omega) = C(\omega)[\, s \in [a,b)\,] \in \Lambda_0$, niin määrittelemme, että

$$(H \cdot B)_\infty := \int H_s \,\mathrm{d}B(s) := C(B(b) - B(a))$$

ja edelleen,

$$(H \cdot B)_t := \int_0^t H_s \,\mathrm{d}B(s) := \int H_s[\, s \in [0,t)\,] \,\mathrm{d}B(s)$$

Tärkeä tulos on

5.4. **Lemma.** *Jos $H \in b\Lambda_0 = \{\, H \in \Lambda_0 : \ \sup H(s,\omega) < \infty \,\}$, niin prosessi $(H \cdot B)_t$ on $(\mathscr{F}_t)$-martingaali.*

Todistus. Harjoitustehtävä (HT). □

Seuraavan lemman avulla elementaarit optionaaliset prosessit on mahdollista yleistää suuremmiksi luokiksi.

5.5. **Lemma.** *Jos $H, K \in b\Lambda_0$, niin*

$$\mathbf{E}\,(H \cdot B)_\infty (K \cdot B)_\infty = \mathbf{E} \int H_s K_s \,\mathrm{d}s.$$

Jos edellä olevassa lemmassa valitsemme käytämme prosesseja $H_s[\, s < t\,]$ ja $K_s[\, s < t\,]$, niin

$$\mathbf{E}\,(H \cdot B)_t (K \cdot B)_t = \mathbf{E} \int H_s K_s[\, s < t\,] \,\mathrm{d}s = \mathbf{E} \int_0^t H_s K_s \,\mathrm{d}s$$

Lemman 5.5 todistus. Oletetaan aluksi, että $H_s = C[\, s \in [a,b)\,]$ ja $K_s = D[\, s \in [a,b)\,]$. Tällöin $H_s K_s = CD[\, s \in [a,b)\,]$ ja siis

$$\int H_s K_s \, \mathrm{d}s = CD(b-a)$$

Toisaalta $(H \cdot B)_\infty (K \cdot B)_\infty = CD(B(b) - B(a))^2$, joten

$$\mathbf{E}\,((H \cdot B)_\infty (K \cdot B)_\infty \,|\, \mathscr{H}_a) = CD\mathbf{E}\, B(b-a)^2 = CD(b-a)$$

Ottamalla odotusarvot lemman väite pitää paikkaansa tässä tapauksessa. Oletetaan sitten, että välit $[a,b) < [c,d)$ ja $H = C[\, s \in [a,b)\,]$ ja $K = D[\, s \in [c,d)\,]$. Tällöin $H_s K_s = 0$ ja jos vasemman puolen termi ehdollistetaan hetken b suhteen, havaitsemme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\,((H \cdot B)_\infty (K \cdot B)_\infty \,|\, \mathscr{H}_b) &= (H \cdot B)_\infty \mathbf{E}\,((K \cdot B)_\infty \,|\, \mathscr{H}_b) \\ &= (H \cdot B)_\infty (K \cdot B)_b = 0, \end{aligned}$$

joten väite on osoitettu ottamalla odotusarvot myös tässä tilanteessa. Yleinen tilanne seuraa näistä lineaarisuuden avulla (HT). □

Edellisen lemman seurauksena, kun $K = H$ saamme seuraavan kaavan

$$\mathbf{E}\,(H \cdot B)_t^2 = \mathbf{E} \int_0^t H(s)^2 \, \mathrm{d}s\,.$$

Tämä on esiversio ns. *Itōn lemmasta*, joka on keskeinen työkalu tämän stokastisen integraalin yleistämiseksi yleisemmille prosesseille.

Määrittelemme seuraavaksi seuraavan integroitavien prosessien luokan ja yleistämme kaikki edelliset tälle luokalle.

5.6. **Määritelmä.** Sanomme, että prosessi H_s on *yksinkertainen optionaalinen prosessi*, jos

$$H(s,\omega) = \sum_{k=1}^m H_k(s,\omega)$$

ja $H_k \in \Lambda_0$. Merkitsemme tällöin, että $H \in \Lambda_1$. Jos lisäksi $\sup|H(s,\omega)| < \infty$, niin merkitsemme $H \in b\Lambda_1$.

Koska voimme aina esittää yksinkertaisen optionaalisen prosessin *yksikäsitteisesti kanonisessa muodossa*, eli $H = \sum H_k$ ja $H_j H_k = 0$, kun $j \neq k$, on seuraava määritelmä integraalille hyvin asetettu.

5.7. **Alustava määritelmä.** Kun $H(s) = H_1(s) + \ldots H_m(s) \in \Lambda_1$ ja $H_j H_k = 0$, kun $k \neq j$ niin määrittelemme, että

$$(H \cdot B)_t := \sum_{k=1}^m \int_0^t H_k(s) \, \mathrm{d}B(s).$$

5.8. **Lemma.** *Lemmat 5.27 sekä 5.5 yleistyvät tilanteeseen, kun* $H, K \in b\Lambda_1$.

Seuraavaksi haluaisimme yleistää integroituvat prosessit jonkin rajankäynnin kautta, mutta mitä tulemme vaatimaan prosesseilta. Tämä kysymys liittyy johdattelevaan esimerkkiin, jolla aloitimme. Havaitsemme, että voimme esittää esimerkin prosessin $W_n(t)$ stokastisena integraalina

$$W_n(t) := \sum_k B(t_k)(B(t_{k+1}) - B(t_k)) = (H_n \cdot B)_t$$

kun

$$H_n(s,\omega) = \sum_k B(t_k,\omega)[\, s \in [t_k, t_{k+1})\,].$$

Toisaalta, mikään ei tähän mennessä ole selittänyt, miksi määrittelimme yksinkertaiset prosessit càdlàg-prosesseina. Miksi emme määritelleet niitä vaikka càglàd-prosesseina, jolloin

$$H_n(s,\omega) = \sum_k B(t_k,\omega)[\, s \in (t_k, t_{k+1}]\,].$$

Näillä vasemmalta jatkuvilla yksinkertaisilla prosesseilla on nimi.

5.9. **Määritelmä.** Sanomme, että prosessi H_s on *elementaarinen ennustettava prosessi*, jos

$$H(s,\omega) = C(\omega)[\, s \in (a,b]\,]$$

kun $a < b$ ja C on $\mathscr{F}_a$-mitallinen. Merkitsemme tällöin, että $H \in \Pi_0$.

Vastaavasti elementaaristen ennustettavien prosessien summat ansaitsevat nimen.

5.10. **Määritelmä.** Sanomme, että prosessi H_s on *yksinkertainen ennustettava prosessi*, jos

$$H(s,\omega) = \sum_{k=1}^{m} H_k(s,\omega)$$

ja $H_k \in \Pi_1$. Merkitsemme tällöin, että $H \in \Pi_1$. Jos lisäksi $\sup|H(s,\omega)| < \infty$, niin merkitsemme $H \in b\Pi_1$.

Voimme nyt selittää sanat *optionaalinen* ja *ennustettava*, jotka määritelmissä kummittelevat.

5.11. **Määritelmä.** Sanomme, että σ-algebra

$$\Lambda := \sigma\{\, H\colon \Omega \times T \to \mathbb{R} :\ H \text{ on adaptoitu càdlàg-prosessi}\,\} \subset \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}(T)$$

on *optionaalinen* ja σ-algebra

$$\Pi := \sigma\{\, H\colon \Omega \times T \to \mathbb{R} :\ H \text{ on adaptoitu càglàd-prosessi}\,\} \subset \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}(T).$$

on *ennustettava.* Jos H on Λ-mitallinen prosessi, niin sanomme että H on optionaalinen prosessi ja jos H on Π-mitallinen, niin sanomme sitä ennustettavaksi prosessiksi.

Ero tuntuu intuitiivisesti mitättömältä. Tiedämme ainakin, että $\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \Lambda$ ja $\Pi_0 \subset \Pi_1 \subset \Pi$. Mutta ennustettavat prosessit ovat tietyllä tapaa helpompia, sillä

5.12. **Lemma.** *Ennustettava σ-algebra voidaan esittää muodossa*

$$\Pi = \sigma(\{\ A \times (a, b] :\ \ A \in \mathscr{F}_a\ \}) =: \mathscr{G}.$$

Todistus. Koska prosessi $H(s) = A[\, s \in (a, b]\,]$ on càglàd-prosessi ja adaptoitu, niin $\mathscr{G} \subset \Pi$. Toisaalta, jos H on adaptoitu càglàd-prosessi, niin

$$H_\varepsilon(s, \omega) := H(\widehat{s}^{\,\varepsilon}, \omega)[\, s \in (\widehat{s}^{\,\varepsilon}, \widehat{s}^{\,\varepsilon} + \varepsilon]\,]$$

on adaptoitu, càglàd-prosessi, joka on $\mathscr{G}$-mitallinen. Koska H on vasemmalta jatkuva, niin $H_{2^{-n}} \to H$, joten myös H on $\mathscr{G}$-mitallinen. □

Seurauksena tästä on

5.13. **Lemma.** *Aina on voimassa* $\Pi \subset \Lambda$.

Todistus. Jos $H(s) = A[\, s \in (a, b]\,]$, niin $H_n(s) = A[\, s \in [a + 1/n, b + 1/n)\,]$ on adaptoitu càdlàg-prosessi ja $H_n \to H$. Voimme siis päätellä, että $A \times (a, b] \in \Lambda$-mitallinen ja siten edellisen lemman perusteella $\Pi \subset \Lambda$. □

Herää kysymys, onko $\Pi = \Lambda$? Voimme vastaavasti helposti osoittaa, että $\Lambda \supset \sigma(\{\ A \times [a, b) :\ \ A \in \mathscr{F}_a\ \})$. Toinen suunta ei onnistukaan, sillä ainoa järkevä adaptoitu, càdlàg-approksimaatio

$$H_\varepsilon(s, \omega) := H(\widehat{s}^{\,\varepsilon}, \omega)[\, s \in [\widehat{s}^{\,\varepsilon}, \widehat{s}^{\,\varepsilon} + \varepsilon)\,]$$

ei välttämättä lähesty vaadittua prosessia H, sillä tarvitsisimme tähän vasemmalta jatkuvuutta!

Itse asiassa, yleisesti $\Pi \neq \Lambda$. Toteamme seuraavan tuloksen (ilman todistusta).

5.14. **Lause.** *Jos $(\mathscr{F}_t)$ on oikealta jatkuva ja täydennetty filtraatio, niin* $\Pi = \Lambda$ *, jos* jokainen *$(\mathscr{F}_t)$-martingaali on jatkuva.*

Todistus. Katso Revuz–Yor. □

Jatkon kannalta mukava tietää, että tällaisia filtraatioita löytyy.

5.15. **Lause.** *Jokainen $(\widehat{\mathscr{H}_t})$-martingaali on jatkuva.*

Jos siis tarkastelemme vain martingaaleja Brownin liikkeen täydennetyn historian suhteen, kaikki on jatkuvaa, kaunista ja mukavaa. Brownin liikkeen suhteen laskettaessa ennustettavuus ja optionaalisuus ovat sama asia, vaikka yleensä ne eivät sitä ole.

Määrittelemmekin jatkossa integraalit pelkästään ennustettaville prosesseilla ja käytämme tätä yhteyttä.

5.2. **Stokastinen integrointi jatkuvan lokaalin martingaalin suhteen.** Olemme nyt pohtineet jo varsin paljon, mikä olisi sopiva integroitavien prosessien luokka. Osoitamme seuraavaksi Lemmojen 5.27 ja 5.5 vastineet ennustettaville prosesseille, mutta nyt jatkuvien lokaalien martingaalien suhteen. Miksi tarvitsemme tätä yleisyyttä, eikö pelkkä Brownin liike riitäkkään? Vastaus on helppo. Jopa malliesimerkissämme tarkastelimme Brownin liikettä *satunnaisella välillä* $[0, \tau]$. Emme kykene edes määrittelemään martingaaleja satunnaiselle välille, mutta lokaali martingaali on helppo määrittää.

Seuraavassa $(\mathscr{F}_t)$ on filtraatio ja X on jatkuva lokaali martingaali sen suhteen. Ensimmäinen määritelmä on selviö.

5.16. **Alustava määritelmä.** Kun $H(s, \omega) = C(\omega)[\, s \in (a, b]\,] \in \Pi_0$, niin määrittelemme, että

$$(H \cdot X)_\infty := \int H_s \,\mathrm{d}X(s) := C(X(b) - X(a))$$

ja edelleen,

$$(H \cdot X)_t := \int_0^t H_s \,\mathrm{d}X(s) := \int H_s[\, s \in [0, t)\,] \,\mathrm{d}X(s)$$

Jos τ on pysähdyshetki ja $H = C[\, s \in (a, b]\,]$, niin

$$(H \cdot X)_{t \wedge \tau} = (H \cdot X^\tau)_t,$$

siispä jos X osoitamme $(H \cdot X)_t$ on martingaali, jos X on martingaali, niin edellisestä seuraa, että $(H \cdot X)_t$ on lokaali martingaali, jos X on lokaali martingaali.

5.17. **Lemma.** *Jos $H \in b\Pi_0$ ja X on martingaali, niin prosessi $(H \cdot X)_t$ on $(\mathscr{F}_t)$-martingaali.*

Todistus. HT. □

Seuraavaksi haluaisimme yleistää Lemman 5.5. Jos tarkastelemme Lemman 5.5 todistusta, niin havaitsemme, että jos $H = C[\, s \in (a, b]\,]$ ja $K = D[\, s \in (a, b]\,]$, niin

$$\mathbf{E}\,\left((H \cdot X)_\infty (K \cdot X)_\infty \,|\, \mathscr{H}_a\right) = CD\mathbf{E}\,\left((X(b) - X(a))^2 \,|\, \mathscr{H}_a\right)$$

Jotta saisimme Lemman 5.5 yleistyksen, haluaisimme toisaalta, että oikealla puolella olisi

$$\mathbf{E}\left(\int_a^b CD\,\mathrm{d}A(s)\,|\,\mathscr{H}_a\right) = CD\mathbf{E}\,(A(b) - A(a)\,|\,\mathscr{H}_t|a])$$

missä A on jokin rajoitetusti heilahteleva funktio. Koska martingaaliominaisuuden avulla

$$\mathbf{E}\,\big((X(b) - X(a))^2\,|\,\mathscr{H}_a\big) = \mathbf{E}\,\big((X(b)^2\,|\,\mathscr{H}_a\big) - X(a)^2,$$

joten yleistys olisi mielekäs jos

$$\mathbf{E}\,(Z(b) - Z(a)\,|\,\mathscr{H}_t|a]) = 0$$

kun $Z(t) := X(t)^2 - A(t)$. Jos A on adaptoitu, niin myös Z olisi adaptoitu, joten edellä mainittu yleistys olisi voimassa, jos Z on martingaali. Tätä varten tarvitsemme seuraavan tiedon, jonka mukaan tämä on todellakin mahdollista.

5.18. **Lause.** *Jos X on jatkuva lokaali martingaali, niin löytyy sellainen yksikäsitteinen* ennustettava kasvava *prosessi $\langle X \rangle$, että $\langle X \rangle_0 = 0$ ja $X(t)^2 - \langle X \rangle_t$ on lokaali martingaali.*

Sanomme lauseen prosessia $\langle X \rangle$ prosessin X *varianssiprosessiksi.* Jos X ja Y ovat kaksi lokaalia martingaalia, niin määrittelemme tämän avulla niiden *kovarianssiprosessin*

$$\langle X, Y \rangle_t := \frac{1}{4}\big(\langle X + Y \rangle_t - \langle X - Y \rangle_t\big).$$

Tällä on seuraava tärkeä ominaisuus:

5.19. **Lemma.** *Jos X ja Y ovat jatkuvia lokaaleja martingaaleja, niin $\langle X, Y \rangle$ on se yksikäsitteinen lokaalisti rajoitetusti heilahteleva ennustettava prosessi, että $\langle X, Y \rangle_0 = 0$ ja*

$$XY_t - \langle X, Y \rangle_t$$

on jatkuva lokaali martingaali.

Todistus. Jälleen väite riittää osoittaa rajoitetuille martingaaleille. Tällöin koska

$$\mathbf{E}\,\big((X \pm Y)_t^2 - \langle X \pm Y \rangle_t\,|\,\mathscr{F}_s\big) = (X \pm Y)_s^2 - \langle X \pm Y \rangle_x$$

ja $(X \pm Y)_t^2 = X_t^2 \pm 2X_tY_t + Y_t^2$, joten $(X + Y)_t^2 - (X - Y)_t^2 = 4X_tY_t$. Koska vastaavasti $\langle X + Y \rangle_t - \langle X - Y \rangle_t = 4\langle X, Y \rangle_t$, niin väite seuraa vähennyslaskulla. □

Ennenkuin osoitamme tämän lauseen, näytämme sen avulla Lemman 5.5 yleistyksen.