4. Martingaalit ja lokaalit martingaalit

Lähestymme nyt jo kovaa vauhtia hetkeä, jolloin voimme aloittaa stokastisen integroinnin. Ennen sitä käymme vielä läpi yhtä keskeistä Brownin liikkeen ominaisuutta.

4.1. Martingaalit.

4.1. Martingaalit. Siinä missä Markovin ominaisuus kertoi, että tulevaisuuden käyttäytymisen ennustamiseksi riittää tuntea pelkästään systeemin tila "nykyhetkellä" koko historian sijaan, niin martingaaliominaisuus kertoo, että *odotuksemme* tulevaisuudesta, jos tunnemme historian, on se, että mikään ei muutu.

Määrittelemmekin

4.1. Määritelmä. Olkoon (X_t) reaaliarvoinen stokastinen prosessija $(\mathscr{F}_t)$ jokin filtraatio. Sanomme, että X on *martingaali* filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen (tai $(\mathscr{F}_t)$-martingaali), jos $\mathbf{E}\,|X|_t < \infty$ jokaisella $t \in T$, prosessi X on $(\mathscr{F}_t)$-adaptoitu ja lisäksi

$$\mathbf{E}\,(X_s \,|\, \mathscr{F}_t) = X_t \tag{4.2}$$

jokaisella ajanehetkellä $s > t \in T$. Jos yhtäsuuruuden $=$ korvaa ehdossa (4.2) merkillä $\geq$ (vastaavasti $\leq$), niin tällaista prosessia nimitetään *alimartingaaliksi* (vastaavasti *ylimartingaaliksi*).

Tarkastelemme aluksi muutamia esimerkkejä martingaaleista sekä prosesseista, jotka ovat lähes martingaaleja, mutteivat kuitenkaan.

4.3. Lause. *Brownin liike on martingaali (täydennetyn) historiansa suhteen.*

Todistus. Tiedämme jo, että B on adaptoitu sekä integroituva. Koska Brownin liikkeellä on riippumattomat lisäykset, niin

$$\mathbf{E}\,(B_s \,|\, \mathscr{H}_t) = \mathbf{E}\,(B_s - B_t + B_t \,|\, \mathscr{H}_t) = B_t + \mathbf{E}\,(B_s - B_t) = B_t.$$

□

4.4. Esimerkki. Prosessi $X_t := B_t^2 - t$ on myös martingaali Brownin liikkeen historian suhteen, sillä selvästi X on adaptoitu, ja $\mathbf{E}\,|X|_t \leq t + \mathbf{E}\,B_t^2 = 2t < \infty$. Martingaaliominaisuuden (4.2) osoittaminen on seuraavanlainen lasku:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\,(X_s \,|\, \mathscr{H}_t) &= \mathbf{E}\,(B_s(B_s - B_t + B_t) \,|\, \mathscr{H}_t) - s \\
&= \mathbf{E}\,(B_s(B_s - B_t) \,|\, \mathscr{H}_t) + B_t^2 - s \\
&= \mathbf{E}\,\big((B_s - B_t)^2 + B_t(B_s - B_t) \,|\, \mathscr{H}_t\big) + X_t + t - s \\
&= s - t + B_t\mathbf{E}\,(B_s - B_t \,|\, \mathscr{H}_t) + X_t + t - s \\
&= B_t\mathbf{E}\,(B_s - B_t) + X_t = X_t
\end{aligned}$$

Seuraava esimerkki esittelee, mitä voimme martingaaliomainaisuudesta esimerkiksi kaivaa ulos.

4.5. **Esimerkki.** Edellisen esimerkin martingaaliominaisuus voidaan helposti yleistää tämän useampiulotteiseen tilanteeseen, sillä jos B on d-ulotteinen Brownin liike, niin

$$Y_t := |B(t)|^2 - td = \sum_{j=1}^{d} (B_j(t)^2 - t)$$

on d:n martingaalin summana martingaali. Olkoon nyt $\tau = \inf\{\, t : \ |B_t| = r \,\}$, mikä on ensimmäinen osumishetki r-säteisen pallon reunaan. Tiedämme siis, että

$$\mathbf{E}_x\, Y(\tau) \ = \mathbf{E}_x\,(\, r^2 - \tau d) = r^2 - d\mathbf{E}_x\, \tau\,.$$

Jos τ olisi tavallinen ajanhetki, niin

$$\mathbf{E}_x\, Y(t) \ = \mathbf{E}_x\, \mathbf{E}\ (Y(t) \,|\, \mathscr{H}_s) \ = \mathbf{E}_x\, Y(s)$$

jokaisella $s < t$, joten erityisesti $\mathbf{E}_x\, Y(t) \ = \ \mathbf{E}_x\, Y(0) \ = \ \mathbf{E}_x\, |B(0)|^2 \ = \ |x|^2$. Jos voisimme jotenkin yleistää tämän koskemaan myös pysähdyshetkiä, niin olisimme päätelleet seuraavaa

$$|x|^2 = \mathbf{E}_x\, Y(\tau) \ = r^2 - d\mathbf{E}_x\, \tau \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}_x\, \tau \ = \frac{r^2 - |x|^2}{d}.$$

Tämä yleistys ei luonnollisestikaan ole täysin itsetään selvyys, vaan martingaalien tärkeä ominaisuus, johon siis palaamme piakkoin.

4.6. **Esimerkki.** Jos f on konveksi funktio ja X on martingaali, niin $f(X_t)$ on alimartingaali, jos $\mathbf{E}\,|f(X_t)| < \infty$ jokaisella $t \in T$. Tästä näemme, että $|B(t)|$, $B(t)_+$, $e^{B(t)}$, jne. ovat alimartingaaleja, mutta ne eivät ole martingaaleja.

Luettelemme seuraavassa muutamia diskreettien martingaalien perustuloksia ja todistamme niistä muutaman.

Seuraavassa $(\mathscr{F}_n)$ on annettu filtraatio ja X_n on adaptoitu sen suhteen. Käytämme niissä hyväksi *esiversiota* stokastisesta integraalista eli summaa

$$(H \cdot X)_n := \sum_{k=1}^{n} H_k \nabla_+ X_{k-1}$$

missä H on *ennustettava prosessi* eli $H_n \in \mathscr{F}_{n-1}$ jokaisella $n \geq 1$.

4.7. **Lemma.** *Jos X_n on ylimartingaali (alimartingaali, martingaali) ja $H_n \geq 0$ on rajoitettu, niin $H \cdot X$ on myös ylimartingaali (alimartingaali, martingaali).*

Todistus. Helppo harjoitustehtävä. $\square$

Tämän tuloksen avulla on helppo osoittaa, että pysäytetty prosessi $X_n^\tau := X(\tau \wedge n)$ on alimartingaali, jos X on alimartingaali. Tämä seuraa siitä, että jos $Y_n = X(\tau \wedge n)$, niin

$$\nabla_+ Y_k = [\,\tau > k\,]\nabla_+ X_k.$$

Siispä $Y_n = X_0 + (H \cdot X)_n$, kun $H_n = [\,\tau \geq n\,]$. Koska $[\,\tau \geq n\,] = 1 - [\,\tau < n\,]$, niin H on ennustettava ja rajoitettu.

Lemman avulla voimme myös osoittaa ensimmäisen version *optinaalisen pysäyttämisen lauseesta*. Muiden versioiden todistukset perustuvat samaan ajatukseen, mutta niitä emme käy läpi.

4.8. **Lemma.** *Jos $N(\omega) \leq M(\omega) < K < \infty$ ovat pysähdyshetkiä ja X on alimartingaali, niin*

$$X_N \leq \mathbf{E}\,(X_M \,|\, \mathscr{F}_N)$$

melkein varmasti. Jos X on martingaali on edellisessä yhtäsuuruus. Lisäksi adaptoitu ja integroituva prosessi X on martingaali jos ja vain jos $\mathbf{E}\,X_N = \mathbf{E}\,X_M$ jokaisella rajoitetulla pysähdyshetkellä N ja M.

Todistus. Oletetaan aluksi, että X on martingaali. Olkoon $Y_n := X(M \wedge n) - X(N \wedge n) = X^M(n) - X^N(n)$. Kun $n \geq K$, niin $Y_n = X_M - X_N$. Toisaalta $Y_0 = 0$. Koska kahden martingaalin erotus on martingaali ja (X_n^N) sekä (X_n^M) ovat martingaaleja, niin Y on martingaali. Erityisesti siis

$$0 = \mathbf{E}\,Y_0 = \mathbf{E}\,Y_K = \mathbf{E}\,X_M - \mathbf{E}\,X_N$$

joten $\mathbf{E}\,X_N = \mathbf{E}\,X_M$. Eli olemme osoittaneet yhden osan väitteestä.
Oletetaan nyt, että $\mathbf{E}\,X_N = \mathbf{E}\,X_M$ jokaisella rajoitetulla pysähdyshetkellä N ja M ja että X on adaptoitu ja integroituva, mutta muuta oletusta prosessista X emme tee.

Oletetaan, että $N \leq M < K$ ja olkoon $A \in \mathscr{F}_N$. Tällöin $N^A := N[\,A\,] + K[\,A^C\,]$ ja $M^A := M[\,A\,] + K[\,A^C\,]$ ovat kaksi rajoitettua pysähdyshetkeä. (HT. Miksi?) Siispä oletuksen nojalla

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,X(N^A) &= \mathbf{E}\,X(N)[\,A\,] + \mathbf{E}\big(X(K)[\,A^C\,]\big)\\ = \mathbf{E}\,X(M^A) &= \mathbf{E}\,X(M)[\,A\,] + \mathbf{E}\big(X(K)[\,A^C\,]\big)\end{aligned}$$

joten jokaisella $A \in \mathscr{F}_N$ on voimassa

$$\mathbf{E}\big(X(N)[\,A\,]\big) = \mathbf{E}\big(X(M)[\,A\,]\big) = \mathbf{E}\big(\mathbf{E}\,(X(M) \,|\, \mathscr{F}_N)\,[\,A\,]\big)$$

Siispä ehdollisen odotusarvon määritelmän nojalla $X(N) = \mathbf{E}\,(X(M) \,|\, \mathscr{F}_N)$. Jos N ja M ovat tavallisia ajanhetkiä, niin X on martingaali. Yhdistettynä alkuosaan olemme osoittaneet koko väitteen ja alkuosan, kun X on martingaali.

Jos X on alimartingaali, niin väiteen todistus on samanlainen, paitsi emme voi vedota siihen että kahden alimartingaalin erotus olisi alimartingaali. Toisaalta

$$\nabla_+ Y_n = [\, N \leq n < M \,] \nabla_+ X_n =: H_{n+1} \nabla_+ X_n$$

ja prosessi $H_n = [\, n \leq M \,] - [\, n \leq N \,]$ on ennustettava, joten Y_n on alimartingaali. Loppu meneekin samalla tavoin. $\square$

Seuraava tulos on kertoo, kuinka hyvin osakemarkkinoilla strategia: "osta halvalla, myy kalliilla" toimii, jos markkinoita (tai hyödykkeen hintaa) kuvaa alimartingaali. Sitä varten määrittelemme jonon pysähdyshetkiä sekä niiden avulla kaksi stokastista prosessia.

$$\begin{aligned}
N_0 &:= 0, h > 0 \\
N_{2k-1} &:= \inf\{\, n > N_{2k-2} : \ X_m \leq a \,\} \\
N_{2k} &:= \inf\{\, n > N_{2k-1} : \ X_m \geq a + h \,\} \\
H_m &:= [\, N_{2k-1} \leq m - 1 < N_{2k} \text{ jollakin } k \,] \\
U_n &:= \sup\{\, k : \ N_{2k} \leq n \,\}
\end{aligned}$$

4.9. **Lemma** (Ylitysepäyhtälö)**.** *Jos (X_m) on alimartingaali, niin*

$$h \mathbf{E}\, U_n \leq \mathbf{E}\, (X_n - a)^+ - \mathbf{E}\, (X_0 - a)^+$$

Todistus. Koska $Y_n = (X_n - a)^+$ on alimartingaali, joka ylittää välin $[0, h]$ samalla kun X_n ylittää välin $[a, a + h]$, joten voimme olettaa, että $a = 0$ ja $X_n \geq 0$.

Tällöin $hU_n \leq (H \cdot X)_n$, sillä jos $N_{2K} \leq n < N_{2K-1}$, niin $hU_n = hK$ ja edelleen

$$\begin{aligned}
(H \cdot X)_n &= \sum_m [\, N_{2k-1} \leq m - 1 < N_{2k}, m \leq n \,] (X_m - X_{m-1}) \\
&= (X(N_2) - X(N_1)) + \cdots + (X(N_{2K}) - X(N_{2K-1})) \geq Kh.
\end{aligned}$$

Siispä $hU_n \leq (H \cdot X)_n$ ainakin, jos $N_{2K} \leq n < N_{2K+1}$. Jos taas $N_{2K+1} \leq n < N_{2K+2}$, niin $hU_n = hK$, mutta $(H \cdot X)_n \geq Kh + X(n) - X(N_{2K+1}) \geq Kh$ määritelmän nojalla, sillä $a = 0$ ja $X_n \geq 0$.

Jos $K_m = 1 - H_m$, niin $X_n - X_0 = (H \cdot X)_n + (K \cdot X)_n$, joten $\mathbf{E}\, X_n - \mathbf{E}\, X_0 \geq h\mathbf{E}\, U_n + \mathbf{E}\, (K \cdot X)_n \geq \mathbf{E}\, (K \cdot X)_1 + h\mathbf{E}\, U_n = \mathbf{E}\, (X_1 - X_0) + h\mathbf{E}\, U_n \geq h\mathbf{E}\, U_n$ edellisen lemman avulla. $\square$

Tämän tuloksen avulla voimme osoittaa helposti tärkeän martingaalien suppenemistuloksen

4.10. **Lause** (Martingaalikonvergenssilause)**.** *Jos* (X_n) *on alimartingaali ja*

$$\sup_n \mathbf{E}\, X_n^+ < \infty,$$

niin $X_n \to X$ *melkein varmasti ja rajasatunnaismuuttuja* X *on integroituva.*

Todistus. Olkoon a ja $h > 0$ vapaasti valittuja rationaalilukuja. Nyt

$$\mathbf{E}\, U_n \le (|a| + \mathbf{E}\, X_n^+)/h$$

joten jos $U = \lim U_n$, niin $\mathbf{E}\, U < \infty$ eli $U < \infty$ melkein varmasti. Jos siis tarkastelemme tapahtumaa

$$\{\liminf X_n < a < a + h < \limsup X_n\}$$

niin havaitsemme, että tämä on nollatapahtuma, koska tämä on mahdollista vain, kun $U = \infty$. Voimme siten päätellä, että

$$\bigcup_{a,h \in \mathbb{Q}} \{\liminf X_n < a < a + h < \limsup X_n\}$$

on nollatapahtuma, joten $\limsup X_n \le \liminf X_n$ melkein varmasti. Fatoun lemman nojalla

$$\mathbf{E}\, X^+ \le \liminf \mathbf{E}\, X_n^+ < \infty$$

joten ainakin $X < \infty$. Koska $\mathbf{E}\, X_n^- = \mathbf{E}\, X_n^+ - \mathbf{E}\, X_n \le \mathbf{E}\, X_n^+ - \mathbf{E}\, X_0$, joten Fatoun lemma osoittaa edelleen, että $\mathbf{E}\, X^- < \infty$. □

Tämän seurauksena saamme seuraavan yleisen tuloksen martingaalien suppenemisominaisuuksista.

4.11. **Lause.** *Jos* (X_t) *on càdlàg martingaali,* $T = \mathbb{R}_+$ *niin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

i) *X_t suppenee avaruudessa L^1, kun $t \to \infty$*
ii) *löytyy sellainen $X_\infty \in L^1$, että $X_t = \mathbf{E}\,(X_\infty \mid \mathscr{F}_t)$*
iii) *perhe $\{\, X_t : \ t \in T \,\}$ on tasaisesti integroituva*

Jos mikä tahansa ehdoista toteutuu, niin $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$ melkein varmasti. Lisäksi jos

$$\sup_{t \in T} \mathbf{E}\, |X_t|^p < \infty,$$

niin ylläolevat ehdot täyttyvät ja lisäksi $X_t \to X_\infty$ myös avaruudessa L^p.

Tässä lauseessa esiintynyt tasaisesti integroituvan perheen käsite on seuraava.

4.12. **Määritelmä.** Joukko satunnaismuuttjia $\{\ X_t :\ \ t \in T\ \}$ on *tasaisesti integroituva*, jos

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{t\in T} \mathbf{E}\left(|X_t| \times [\,|X_t| \geq M\,]\right) = 0$$

4.13. *Huomautus.* Jos X on martingaali, niin

$$\lim_{M\to\infty} \mathbf{E}\left(|X_t| \times [\,|X_t| \geq M\,]\right) = 0$$

jokaisella $t \in T$. Jos merkitsemme väitteet formaalisti, niin jokainen martingaali toteuttaa ehdon

$$\forall\varepsilon > 0, \forall t \in T, \exists N > 0, \forall M > N \colon \mathbf{E}\left(|X_t| \times [\,|X_t| \geq M\,]\right) \leq \varepsilon.$$

Jos martingaali toteuttaa ehdon *iii*) edellisessä lauseessa, eli se on tasaisesti integroituva, niin se toteuttaa ehdon

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall t \in T, \forall M > N \colon \mathbf{E}\left(|X_t| \times [\,|X_t| \geq M\,]\right) \leq \varepsilon.$$

missä olemassaolokvanttori ja universaalikvanttori ovat vaihtaneet paikkaa. Tämä viittaa jonkinlaiseen kompaktisuuteen ja todellakin, tasainen integroituvuus on yhtäpitävää *heikon (pre)kompaktisuuden* kanssa avaruudessa L^1. Lauseen lopussa ollut oletus siitä, että jos martingaali on rajoitettu L^p:ssä, niin väite seuraa myös tällöin vastaa funktionaalianalyysistä tutun tiedon mukaan heikkoa kompaktisuutta avaruudessa L^p.

Koska Banachin avaruuksissa heikko kompaktisuus takaa suppenevan osajonon löytymisen, niin martingaaleille heikosti suppenevan osajonon olemassaolo jo takaa sekä vahvan (normin mielessä) suppenevuuden että melkein varman suppenemisen.

Tarvitsemme vielä Joseph Leo Doobin martingaaliepäyhtälöitä sekä optionaalisia pysähtymisen lauseita.

4.14. **Lause** (Doobin maksimaali-L^p-epäyhtälöt)**.** *Jos* (X_m) *on alimartingaali ja* $X^*_m = \sup_{j\leq m} X_j$, *niin*

$$\lambda\mathbf{P}\,(\,X^* \geq \lambda\,) \leq \mathbf{E}\,X_n^+\,.$$

Edelleen, kun $p > 1$, *niin*

$$\mathbf{E}\,(X_n^*)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}\,(X_n^+)^{\,p}.$$

Nämä tulokset yleistyvät mukavasti myös jatkuvaan tilanteeseen.

4.15. **Lause** (Doobin maksimaali-L^p-epäyhtälöt (osa II))**.** *Jos* (X_t) *on càdlàg alimartingaali ja* $T \subset \mathbb{R}$ *on väli ja* $X_t^* = \sup_{s\leq t}|X_s|$, *niin*

$$\lambda\mathbf{P}\,(\,X_t^* \geq \lambda\,) \leq \mathbf{E}\,|X_t|\,.$$

Edelleen, kun $p > 1$, niin

$$\mathbf{E}\,(X_t^*)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}\,|X_t|^p\,.$$

Seuraavat lauseet kertovat, että voimme pysäyttää martingaalin myös rajoittamattomalla pysähdyshetkellä, jos lisäksi oletamme lisää integroituvuutta.

4.16. **Lause** (Optionaalisen pysäyttämisen lause)**.** *Jos $(X_{n\wedge N})$ on tasaisesti integroituva alimartingaali, niin tällöin jokaisella pysähdyshetkellä $M \leq N$ on voimassa*

$$\mathbf{E}\,X_M \leq \mathbf{E}\,X_N$$

Myös tämä tulos yleistyy jatkuvaan aikaan, mutta muotoilemme sen vain martingaaleille. Yhdistämme siihen myös martingaalikonvergenssituloksen.

4.17. **Lause** (Optionaalisen pysäyttämisen lause (Osa II))**.** *Jos X on càdlàg martingaali ja $\tau_1 \leq \tau_2 < \infty$ ovat kaksi pysähdyshetkeä, niin*

$$X_{\tau_1} = \mathbf{E}\,(X_{\tau_2}\,|\,\mathscr{F}_{\tau_1})$$

melkein varmasti. Jos X on tasaisesti integroituva, niin myös perhe

$$\{\,X_\tau :\ \tau \text{ on pysähdyshetki}\,\}$$

on tasaisesti integroituva ja jos $\tau < \infty$, niin

$$X_\tau = \mathbf{E}\,(X_\infty\,|\,\mathscr{F}_\tau)$$

4.18. *Huomautus.* Edellisissä tuloksissa oletimme càdlàg-ominaisuuden, jotta jatkuva-aikaiset tulokset saatiin mukavasti rajankäynnin avulla diskreettiaikaisista tuloksista. Tämä ei kuitenkaan ole mikään oleellinen rajoitus, sillä voimme soveltaa seuraavaa tulosta (jota emme kuitenkaan tarvitse sen kummemmin): *Jos $(\mathscr{F}_t)$ on oikealta jatkuva ja täydennetty nollatapahtumilla ja X on $(\mathscr{F}_t)$-martingaali, niin löydämme version $\widetilde{X}$, joka on myös $(\mathscr{F}_t)$-martingaali ja joka on càdlàg.*

4.2. **Lokaalit martingaalit.** Kohta tulemme määrittelemään *lokaalin martingaalin.* Lokalisointi viittaa aina jonkinlaisen katkaisemisen tai osiin pilkkomisen periaatteeseen. Optionaalisen pysäyttämisen lauseen nojalla voimme osoittaa, että pysäytetty martingaali on martingaali. Tarkoitamme tällä seuraavaa. Määrittelemme

$$X^\tau(t) := X(t \wedge \tau)$$

kun τ on pysähdyshetki. Kun tarkastelemme tätä prosessia, niin huomaamme, että hetken τ jälkeen prosessi *pysähtyy* tilaan $X(\tau)$. Osoitamme, että tämä pysäyttäminen ei tuhonnut martingaaliominaisuutta.

4.19. **Lemma.** *Kun X on càdlàg martingaali filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen, niin pysäytetty prosessi $Y := X^\tau$ on càdlàg martingaali filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen jokaisella pysähdyshetkellä τ.*

Tämän tuloksen voisi osoittaa suoraan käyttämällä optionaalisen pysäyttämisen lauseen (HT), mutta sen voi osoittaa käyttämällä seuraavaa lemmaa apuna.

4.20. **Lemma.** *Adaptoitu càdlàg-prosessi X on martingaali filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen jos ja vain jos jokaisella rajoitetulla pysähdyshetkellä τ satunnaismuuttuja X_τ on integroituva ja lisäksi*

$$\mathbf{E}\, X_\tau = \mathbf{E}\, X_0 \,.$$

Tämän lemman todistus on toiseen suuntaan suora seuraus optinaalisen pysäyttämisen lauseesta ja toinen suunta on samanlainen kuin vastaavan diskreettiaikaisen tuloksen osoitus.

Lemman 4.19 todistus. Olkoon η jokin rajoitettu pysähdyshetki. Tällöin $Y(\eta) = X(\eta \wedge \tau)$, joten tiedämme, että $\mathbf{E}\,|Y(\eta)| < \infty$ ja

$$\mathbf{E}\, Y(\eta) = \mathbf{E}\, X(\eta \wedge \tau) = \mathbf{E}\, X(0) = \mathbf{E}\, Y(0)\,.$$

Koska pysäyttäminen säilyttää càdlàg-ominaisuuden, niin Y on martingaali. □

Koska martingaaliominaisuus säilyy pysäyttämisessä, niin seuraava määritelmä yleistää martingaalin käsitteen.

4.21. **Määritelmä.** Olkoon (X_t) càdlàg prosessi ja $(\mathscr{F}_t)$ jokin filtraatio. Sanomme, että X on *lokaali martingaali* filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen, jos X on $(\mathscr{F}_t)$-adaptoitu ja löytyy sellainen jono (τ_n) pysähdyshetkiä, että $\tau_n \uparrow \infty$ ja $X^{\tau_n}[\,\tau_n > 0\,]$ on tasaisesti integroituva martingaali jokaisella n.

4.22. *Huomautus.* Vastaavasti voimme määritellä *lokaalit alimartingaalit*, *lokaalisti rajoitetut prosessit* jne.

4.23. *Huomautus.* Kuten huomaamme, yleistämmekin tasaisesti integroituva martingaalit, sillä näiden käyttäminen antaa käyttöömme kaikki pysäyttämiseen ja suppenemiseen liittyvät työkalut. Edelleen pudotimme oletuksen siitä, että prosessit olisivat yksiulotteisia. Tämä voidaan selittää siten, että vektoriprosessi on martingaali, jos sen koordinaattiprosessit ovat kaikki martingaaleja.

4.24. **Esimerkki.** Jokainen tasaisesti integroituva martingaali on lokaali martingaali, sillä tuolloin voimme valita jonoksi $\tau_n = n$.

Seuraava esimerkki käyttää Lauseen 3.13 ”yleistystä” apunaan.

4.25. **Lemma.** *Lause 3.13 on voimassa yleisemmin, kun korvaamme Brownin liikee B prosessilla X ja sen täydennetyn historia $(\widehat{\mathscr{H}_t})$ oikealta jatkuvalla täydennetyllä filtraatiolla $(\mathscr{F}_t)$, kunhan X on jatkuva ja adaptoitu filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen.*

Todistus. Nämä olivat ainoat ominaisuudet, mitä käytimme Lauseen 3.13 todistuksessa hyväksi Brownin liikkeestä ja sen historiasta, joten todistus pätee tässä yleisyydessäkin. □

Tämä tärkeä yleistys voidaan nyt valjastaa seuraavan esimerkin käyttöön.

4.26. **Esimerkki.** Jokainen *jatkuva* martingaali on lokaali martingaali, kun filtraatio on oikealta jatkuva ja täydennetty. Tämä nähdään siitä, että jos asetamme $\tau_n := \tau_{G_n}$, kun $G_n = \{\ x \in \mathbb{R}^d : \ |x| \geq n\ \}$ on pysähdyshetki, ja jatkuvuuden nojalla $|X^{\tau_n}(t)| \leq n$ jokaisella t, joten erityisesti $X^{\tau_n}[\,\tau_n > 0\,]$ on tasaisesti integroituva martingaali jokaisella n.

Siispä X on lokaali martingaali, kunhan $\tau_n \uparrow \infty$. On selvää, että $\tau_n \leq \tau_{n+1}$ jokaisella n. Jos $\lim \tau_n(\omega) = M < \infty$, niin prosessin polku $X(M,\omega) = \infty$. Tällainen polku ei voi olla jatkuva, joten $\{\lim \tau_n < \infty\}$ on nollatapahtuma.

Koska jatkossa käsittelemme lähinnä pelkästään jatkuvia prosesseja, niin tällöin voimme aina ajatella, että lokaalit martingaalit sisältävät kaikki martingaalit. Toisaalta jos jokin väite pitää paikkaansa *rajoitetuille* jatkuville martingaaleille, niin edellisen esimerkin perusteella sama väite voi hyvinkin pitää paikkaansa myös lokaaleille martingaaleille.

Havaitsemme, että moni asia, jotka esiintyivät jo aiemmin, on mahdollista esittää myös lokaaleille martingaaleille. Myös seuraava esimerkki on hyödyllinen havainto.

4.27. **Esimerkki.** Jos X on jatkuva martingaali ja f konveksi funktio, niin tiedämme, että $Y = f(X)$ on jatkuva alimartingaali, jos $\mathbf{E}\,|Y_t| < \infty$ jokaisella $t \in T$. Joka tapauksessa Y on jatkuva lokaali alimartingaali, sillä jos määrittelemme

$$\tau_n = \inf\{\ t > 0 : \ |Y_t| > n\ \}$$

niin τ_n on pysähdyshetki filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen ja lisäksi $|Y^{\tau_n}(t)| \leq n$. Siispä Y^{τ_n} on rajoitettu ja optionaalisen pysäyttämisen lauseen perusteella tiedämme sen olevan myös alimartingaali.

Pystymme siten keventämään integroituvuusoletuksia lokaalin martingaalien tilanteissa.

4.28. **Esimerkki.** Tiedämme, että $\exp(MB_t)$ on alimartingaali jokaisella $M > 0$. Toisaalta tiedämme, että $\exp(B_t^2)$ ei ole alimartingaali, sillä esimerkiksi

$$\mathbf{E}\,\exp(B_1^2) = \int e^{x^2} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \infty$$

Kuitenkin $\exp(B_t^2)$ on lokaali alimartingaali, sillä $f(x) = \exp(x^2)$ on konveksi funktio, sillä $f''(x) = f(x)(4x^2 + 2) > 0$ jokaisella x.

Kappaleen 2 esimerkissä käsittelimme prosessin $Z_t = w(B_t)$ approksimaatiota *satunnaisella välillä* $[0, \tau)$. Käytimme hyväksi martingaaliominaisuutta jo tuolloin, mutta martingaalin määritelmä vaatii ominaisuuden jokaisella ajanhetkellä. Lokaalin martingaalin voimme kyllä määritellä myös satunnaisilla väleillä.

4.29. **Määritelmä.** Olkoon (X_t) càdlàg prosessi. Olkoon $(\mathscr{F}_t)$ jokin filtraatio ja τ jokin $(\mathscr{F}_t)$-pysähdyshetki. Sanomme, että X on *lokaali martingaali satunnaisella välillä* $[0, \tau)$ filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen, jos löytyy sellainen jono (τ_n) pysähdyshetkiä, että $\tau_n \uparrow \tau$ ja $X^{\tau_n}[\,\tau_n > 0\,]$ on tasaisesti integroituva $(\mathscr{F}_t)$-martingaali jokaisella n.