3. Markovin prosessit ja vahva Markovin ominaisuus

Aloitamme nyt edellisen kappaleen päättäneen esimerkin yleistämisen Brownin liikkeelle. Käymme yksitellen läpi esimerkin aikana ilmestyneet käsitteiden aihiot ja näytämme, että Brownin liikkeellä on kaikki vastaavat ominaisuudet.

3.1. **Markovin prosessi.** Ensimmäiseksi yleistämme Markovin ominaisuuden. Kun S on yleinen tilajoukko ja aika on jatkuva, niin emme voi määritellä Markovin ominaisuutta polkujen avulla, sillä kunkin yksittäisen polun todennäköisyys on luultavasti nolla. Tähän tarvitsemmekin ehdollisen odotusarvon yleisempää muotoilua.

Jos $T = \mathbb{N}$ ja S on numeroituva, niin Markovin ehto (2.9) on yhtälö kaikilla ajanhetkillä n, m ja tiloilla $i_0, i_1, \ldots, i_n, j \in S$. Voimme tämän avulla laskea ehdollisen todennäköisyyden, kun tiedämme historian $\mathscr{H}_n := \sigma\{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\}$, sillä voimme koota Markovien ehdon kaikki yhtälöt summaamalla yli kaikkien tilojen $i_0 \ldots, i_n$, jolloin

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\,(\,X_{n+m} = j \,|\, \mathscr{H}_n\,) &= \sum_{i_0,\ldots,i_n \in S} [\,\forall k = 0, \ldots, n : X_k = i_k\,] \times \\
&\qquad\qquad \times \mathbf{P}\,(\,X_{n+m} = j \,|\, \forall k = 0, \ldots, n : X_k = i_k\,) \\
&= \sum_{i_0,\ldots,i_n \in S} [\,\forall k = 0, \ldots, n : X_k = i_k\,] \times \\
&\qquad\qquad \times \mathbf{P}\,(\,X_{n+m} = j \,|\, X_n = i_n\,) \\
&= \mathbf{P}\,(\,X_{n+m} = j \,|\, X_n\,)
\end{aligned}$$

Tämä muotoilu on jo helpompi yleistää korvaamalla $n + m$ ja n yleisillä ajanhetkillä $t \geq s \geq 0$. Koska tapahtuman $\{X_t = j\}$ ehdollinen todennäköisyys voi hyvin olla aina nolla yleisessä tilanteessa, summaalla yli tilojen j, voimme muotoilla äärellisen tilanteen vielä muodossa

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\,(\,X_{n+m} \in A \,|\, \mathscr{H}_n\,) &= \sum_{j \in A} \mathbf{P}\,(\,X_{n+m} = j \,|\, \mathscr{H}_n\,) \\
&= \sum_{j \in A} \mathbf{P}\,(\,X_{n+m} = j \,|\, X_n\,) = \mathbf{P}\,(\,X_{n+m} \in A \,|\, X_n\,)
\end{aligned}$$

kaikilla $A \subset S$. Tarvitsemme yleiseen määritelmään vielä yhden yleistyksen eli yleistämme *historian* käsitteen. Historialla on yksi sisäinen tärkeä ominaisuus eli historia kasvaa ajan kuluessa. Tämä tarkoittaa, että $\mathscr{H}_n \subset \mathscr{H}_m$ kun $n \leq m$. Otamme tämän yleisen *filtraation* käsitteen määritelmäksi.

3.1. **Määritelmä.** Ajan suhteen indeksöity perhe $(\mathscr{F}_t; t \in T)$ on *filtraatio*, jos $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$ on ali-σ-algebra jokaisella $t \in T$ sekä $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ aina, kun $s \leq t$. Jos aikajoukosta ei ole epäselvyyttä, merkitsemme filtraatiota $(\mathscr{F}_t)$.

Tämän käsitteen avulla, voimme asettaa Markovin prosessin yleisen määritelmän

3.2. **Määritelmä.** Stokastinen prosessi (X_t) on *Markovin prosessi filtraation* $(\mathscr{F}_t)$ suhteen, jos kaikilla ajanhetkillä $t \geq s$ ja kaikilla $A \in \mathscr{S}$ on voimassa

$$\mathbf{P}\,(\, X_t \in A \,|\, \mathscr{F}_s \,) = \mathbf{P}\,(\, X_t \in A \,|\, X_s \,) \quad \text{m.v.} \tag{3.3}$$

Tämä on *unohtamisominaisuuden* yleinen muotoilu. Stokastiset prosessit -kurssin määritelmä sisälsi vielä vaatimuksen *aikastationaarisuudesta*. Muotoilemme seuraavaksi aikastationaarisen Markovin prosessin yleisesti. Äärellisessä tilanteessa

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,(\, X_{n+m} \in A \,|\, X_n \,) &= \sum_j [\, X_n = j \,]\mathbf{P}\,(\, X_{n+m} \in A \,|\, X_n = j \,) \\ &= \sum_j [\, X_n = j \,]\mathbf{P}\,(\, X_{n+m-1} \in A \,|\, X_{n-1} = j \,)\end{aligned}$$

joten induktiolla "taaksepäin" on siis voimassa

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,(\, X_{n+m} \in A \,|\, X_n \,) &= \sum_j [\, X_n = j \,]\mathbf{P}\,(\, X_m \in A \,|\, X_0 = j \,) \\ &= \sum_j [\, X_n = j \,]\mathbf{P}_j\,(\, X_m \in A \,) \\ &= \mathbf{P}_{X_n}\,(\, X_m \in A \,)\,.\end{aligned}$$

Voimme helposti yleistää tämän ja yhdistää edellä olleen unohtamisominaisuuden kanssa, joten määrittelemme.

3.4. **Määritelmä.** Stokastinen prosessi (X_t) on *aikastationaarinen Markovin prosessi filtraation* $(\mathscr{F}_t)$ suhteen, jos kaikilla ajanhetkillä $t \geq s$ ja kaikilla $A \in \mathscr{S}$ on voimassa

$$\mathbf{P}\,(\, X_t \in A \,|\, \mathscr{F}_s \,) = \mathbf{P}_{X_s}\,(\, X_{t-s} \in A \,) \quad \text{m.v.} \tag{3.5}$$

Yleisesti tämä lisäoletus ei ole voimassa ja törmäämme helposti tällaisiin tapauksiin.

3.6. **Esimerkki** (Siltakävely)**.** Olkoon $T = \mathbb{N}_d$ ja $S = \mathbb{Z}$. Määrittelemme kävelyn (X_k) seuraavan stokastisen differenssiyhtälön avulla:

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ \nabla_+ X_k = \left\lfloor \frac{-X_k}{d-k} \right\rfloor + \xi_k, \quad \text{kun } k = 0, \ldots, d-1 \end{cases}$$

Tässä (ξ_k) on kolikonheittosatunnaismuuttujia. Nimitimme kävelyä siltakävelyksi, sillä ajan hetkellä $k = d$ prosessi varmasti joko tilassa 1 tai -1. Tämä kävely on Markovin prosessi historian $(\mathscr{H}_n)$ suhteen, sillä

$$X_{n+1} = X_n + \nabla_+ X_n = X_n + \left\lfloor \frac{-X_n}{d-n} \right\rfloor + \xi_n =: g(X_n) + \xi_n$$

ja siis

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,(\,X_{n+1} = j \mid \mathscr{H}_n\,) &= \sum_{i \in S} \mathbf{P}\,(\,X_n = i, X_{n+1} = j \mid \mathscr{H}_n\,) \\ &= \sum_{i \in S} \mathbf{E}\,([\,X_n = i, \xi_n = j - g(i)\,] \mid \mathscr{H}_n) \\ &= \sum_{i \in S} [\,X_n = i\,] \mathbf{P}\,(\,\xi_n = j - g(i) \mid \mathscr{H}_n\,)\,.\end{aligned}$$

Nyt ξ_n on riippumaton sekä koko historiasta $\mathscr{H}_n$ että pelkästä satunnaismuuttujasta X_n, joten

$$\begin{aligned}\sum_{i \in S} [\,X_n = i\,] \mathbf{P}\,(\,\xi_n = j - g(i) \mid \mathscr{H}_n\,) &= \sum_{i \in S} [\,X_n = i\,] \mathbf{P}\,(\,\xi_n = j - g(i) \mid X_n\,) \\ &= \sum_{i \in S} \mathbf{P}\,(\,X_n = i, \xi_n + g(X_n) = j \mid X_n\,) \\ &= \mathbf{P}\,(\,X_{n+1} = j \mid X_n\,)\end{aligned}$$

Aikastationaarisuus ei ole kuitenkaan voimassa (HT).

Jos skaalaisimme kävelyn parametrilla h samaan tapaan kuin yksinkertaisen satunnaiskävelyn, niin kävely olisi ajanhetkellä dh tilassa $\pm\sqrt{h}$. Heuristisesti voisimme päätellä, että kun $h \to 0^+$ ja $dh \to 1$, niin skaalattu stokastinen differenssiyhtälö suppenisi stokastiseksi differentiaaliyhtälöksi

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ \mathrm{d}X_t = \frac{-X_t}{1-t}\,\mathrm{d}t + \,\mathrm{d}B_t, \quad \text{kun } t \in [0,1) \end{cases}$$

Tätä prosessia kutsutaan *Brownin sillaksi* ja tulemme myöhemmin käyttämään Itō-laskentaa sen ominaisuuksien selvittämiseen.

Kurssin ensimmäisiä perustuloksi on Brownin liikkeen Markovisuus.

3.7. **Lause.** *Brownin liike on aikastationaarinen Markovin prosessi historiansa suhteen.*

Todistus. Tämä on aikaisempien laskujen suora yleistys. Tiedämme, että Brownin liikkeellä on riippumattomat lisäykset, joten

$$B(t) - B(s) \perp\!\!\!\perp \mathscr{H}_s$$

Tästä erityisesti seuraa, että kullakin $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\,(\,B(t) \le x \mid \mathscr{H}_s\,) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}\left(\,\widehat{B}^{\varepsilon}(s) = j\varepsilon, B(t) \le x \mid \mathscr{H}_s\right)$$

Kun $\widehat{B}^\varepsilon(s) = j\varepsilon$, niin $j\varepsilon \le B(s) < j\varepsilon + \varepsilon$, joten $B(t) - B(s) \le B(t) - j\varepsilon \le x - j\varepsilon$. Siispä

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,(\, B(t) \le x \mid \mathscr{H}_s\,) &\le \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{P}\left(\, \widehat{B}^\varepsilon(s) = j\varepsilon, B(t) - B(s) \le x - j\varepsilon \mid \mathscr{H}_s \right) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} [\, \widehat{B}^\varepsilon(s) = j\varepsilon\,] \mathbf{P}\,(\, B(t) - B(s) \le x - j\varepsilon\,)\end{aligned}$$

Koska $B(t) - B(s) \sim B(t-s)$, niin

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,(\, B(t) \le x \mid \mathscr{H}_s\,) &\le \sum_{j\in\mathbb{Z}} [\, \widehat{B}^\varepsilon(s) = j\varepsilon\,] \mathbf{P}\,(\, B(t-s) \le x - j\varepsilon\,) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} [\, \widehat{B}^\varepsilon(s) = j\varepsilon\,] \mathbf{P}_{j\varepsilon}\,(\, B(t-s) \le x\,) \\ &= \mathbf{P}_{\widehat{B}^\varepsilon(s)}\,(\, B(t-s) \le x\,)\end{aligned}$$

Kun nyt $\varepsilon \to 0$, niin oikea puoli suppenee kohti arvoa $\mathbf{P}_{B(s)}\,(\, B(t-s) \le x\,)$. Epäyhtälö toiseen suuntaan jää harjoitustehtäväksi. $\square$

3.2. **Pysähdyshetki.** Reuna-arvotehtäväesimerkissä haluamme laskea odotusarvon

$$u(x) = \mathbf{E}_x\, f(B(\tau))\,,$$

missä τ on Brownin liikkeen *poistumishetki* alueesta G. Aiemmin käyttämämme absorptiohetken käsite vastasi tätä poistumishetkeä. Jos absorptiojoukko oli yhden pisteen joukko, niin MK jäi "nalkkiin" tähän pisteeseen, joten asioita kaumpaa katsovasta ketju vaikutti pysähtyvän. Määrittelemmekin käsitteen, jota kutsumme *pysähdyshetkeksi*. Absorptiohetken oli seuraava keskeinen ominaisuus: jos (X_k) on MK ja A on absorptiojoukko, niin

$$\{\tau_A = n\} = \{X_0 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\}$$

Itse asiassa tämä on tarkalleen absortiohetken määritelmä. Havaitsemme, että $\{\tau_A = n\} \in \mathscr{H}_n$ on voimassa jokaisella ajanhetkellä $n \in \mathbb{N}$.

Tämä ominaisuus on juuri se, mitä tarkoitamme pysähdyshetkellä eli määrittelemme alustavasti.

3.8. **Alustava määritelmä.** Kun $T = \mathbb{N}$ ja S on numeroituva, niin satunnaismuuttuja $\tau\colon \Omega \to T$ on *pysähdyshetki* filtraation $(\mathscr{F}_n)$ suhteen, jos

$$\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Heuristisesti pysähdyshetki tarkoittaa, että odotamme jonkin ilmiön tapahtumista, jota kuvaa jonkin laitteen pysähtyminen. Jos tiedämme koko historian nykyhetkeen asti, voimme varmuudella sanoa, onko odotamamme ilmiö tapahtunut jo aiemmin tai juuri tällä hetkellä, sillä voimme havaita, onko laite pysähtynyt tähän mennessä.

Koska nykyhetken ja historian raja on häilyvä, kun aika on jatkuvaa, ei ole syytä olettaa, etteikö tapahtuma $\{\tau = t\}$ olisi nollatapahtuma. Käytämme siksi apuna seuraavaa havaintoa: jokaisella ajanhetkellä n

$$\{\tau \leq n\} = \{\tau = 0\} \cup \ldots \cup \{\tau = n\}.$$

sekä

$$\{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \setminus \{\tau \leq n-1\}$$

kun $n \geq 1$.

Jos τ on pysähdyshetki, niin $\{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta, jos tiedämme. että $\{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, niin jälkimmäisen kaavan nojalla τ on pysähdyshetki. Tämä muotoilu pysähdyshetkelle on helppo yleistää ja asetammekin siis

3.9. **Määritelmä.** Olkoon $(\mathscr{F}_t)$ jokin filtraatio. Sanomme, että satunnaismuuttuja $\tau\colon \Omega \to T$ on *pysähdyshetki* filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen, jos

$$\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$$

jokaisella $t \in T$.

Yksinkertaisin pysähdyshetki on ajanhetki.

3.10. **Esimerkki.** Olkoon $t \in T$ ja $\tau = t$ vakiosatunnaismuuttuja. Tällöin τ on pysähdyshetki.

Pysähdyshetki yleistää siten ajanhetken *satunnaiseksi ajanhetkeksi*, joka on hallittavissa. Seuraavat esimerkit ovat mukavia harjoitustehtäviä.

3.11. **Esimerkki.** Olkoon (τ_n) jono $(\mathscr{F}_t)$-pysähdyshetkiä. Tällöin

- $\tau_1 \wedge \tau_2$ on pysähdyshetki.
- $\tau_1 \vee \tau_2$ on pysähdyshetki.
- $\tau := \sup \tau_n$ on $(\mathscr{F}_t)$-pysähdyshetki.

3.12. *Huomautus.* Esimerkkeihin emme ottaneet mukaan pysähdyshetkien infimumia emmekä raja-arvoja. Palaamme näihin hieman myöhemmin.

Tämän määritelmän jälkeen on asiallista aina osoittaa, että absorptiohetkien yleistykset ovat pysähdyshetkiä. Tämä takaa sen, että malliesimerkkimme τ on pysähdyshetki juuri asettamamme määritelmän mukaan.

3.13. **Lause.** *Kun $G \subset \mathbb{R}^d$ on avoin tai suljettu, niin*

$$\tau_G := \inf\{\, t > 0 : \ B(t) \in G \,\}$$

on pysähdyshetki täydennetyn historian $(\widehat{\mathscr{H}_t})$ *suhteen. Edelleen, kun G on suljettu, niin τ_G on pysähdyshetki myös historiansa suhteen.*

Tässä törmäämme ensimmäistä kertaa todella näihin nollajoukkoihin. Määrittelemme täydennetyn historian siten, että

$$\widehat{\mathscr{H}_t} := \sigma(\mathscr{H}_t, \mathscr{N}).$$

Herää taatusti kysymys, onko tämä todella tarpeen ja tulemme palaamaan tähän kysymykseen vielä muutamaan otteeseen. Helpotamme tarkastelua ja toteamme lauseen, jonka todistamme myöhemmin, kunhan meillä on riittävästi työkaluja sen todistamiseen.

3.14. **Lause.** *Brownin liikkeen täydennetty historia $(\widehat{\mathscr{H}_t})$ on* oikealta jatkuva *eli*

$$\widehat{\mathscr{H}_t} = \bigcap_{s>t} \widehat{\mathscr{H}_s} =: \widehat{\mathscr{H}_s}^{+}$$

jokaisella $t \in T$.

Todistus. Myöhemmin. □

Törmäsimme päätä pahkaa oikealta jatkuviin filtraatioihin (eli filtraatioihin $(\mathscr{F}_t)$ joille $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_t^+$ jokaisella $t \in T$) ja saattaisimme miettiä, mitä etua oikealta jatkuvuudesta on.

3.15. **Esimerkki.** Olkoon (τ_n) jono $(\mathscr{F}_t)$-pysähdyshetkiä ja olkoon $(\mathscr{F}_t)$ oikealta jatkuva. Tällöin

- $\tau := \inf \tau_n$ on $(\mathscr{F}_t)$-pysähdyshetki.
- $\tau := \limsup \tau_n$ on $(\mathscr{F}_t)$-pysähdyshetki.
- $\tau := \liminf \tau_n$ on $(\mathscr{F}_t)$-pysähdyshetki.
- jos raja-arvo $\tau := \lim \tau_n$ on olemassa, niin $(\mathscr{F}_t)$-pysähdyshetki.

3.16. *Huomautus.* Jos $(\mathscr{F}_t)$ on filtraatio, niin filtraatio $(\mathscr{F}_t^+)$ on oikealta jatkuva. (HT)

Ennenkuin aloitamme Lauseen 3.13 todistusta, käymme läpi mukavan aputuloksen, joka helpottaa Lauseen 3.13 todistamista.

3.17. **Lemma.** *Olkoon $(\mathscr{F}_t)$ filtraatio. Tällöin τ on $(\mathscr{F}_t^+)$-pysähdyshetki, jos*

$$\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t$$

jokaisella $t \in T$.

Todistus. On siis näytettävä, että $\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t^+$ jokaisella $t \in T$. Koska

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\tau < t + 2^{-n}\} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_{t+2^{-n}} = \mathscr{F}_t^+,$$

väite seuraa. □

Lauseen 3.13 todistus. Olkoon G avoin. Haluamme siis osoittaa, että $\{\tau_G \leq t\} \in \widehat{\mathscr{H}_t}$. Lemman 3.17 mukaan riittää näyttää, että

$$\{\tau_G < t\} \in \mathscr{H}_t.$$

Jos hetken vertaamme vasenta puolta diskreettiin tilanteeseen

$$\{\tau_A < n\} = \{X_k \in A \text{ jollakin } k < n\}$$

havaitsemme, että voisimme yrittää samaa jatkuvassa tilanteessa, sillä myös

$$\{\tau_G < t\} = \{B(s) \in G \text{ jollakin } s < t\}.$$

Yhtäsuuruus on voimassa, sillä jos $\tau_G < t$, niin suurimman alarajan määritelmän nojalla löytyy jokin $\tau_G \leq s < t$, jolle $B(s) \in G$, joten vasemman puolen tapahtuma sisältyy oikean puolen tapahtumaan. Toisaalta, jos $B(s) \in G$ jollakin $s < t$, niin suurimman alarajan määritelmän nojalla $\tau_G \leq s < t$. On oleellista huomata, että tapahtuman $\{\tau_G \leq t\}$ esittäminen ei käy ollenkaan näin näppärästi, vaikka diskreetissä tapauksessa esittäminen onnistuukin.

Koska Brownin liike on *jatkuva* ja G on avoin, niin

$$\begin{aligned}\{B(s) \in G \text{ jollakin } s < t\} &= \{B(s) \in G \text{ jollakin } \textit{rationaalisella } s < t\} \\ &= \bigcup_{s\in\mathbb{Q}, s<t} \{B(s) \in G\} \in \mathscr{H}_t,\end{aligned}$$

sillä jos $B(s) \in G$ jollakin irrationaalisella $s < t$, niin joukon G avoimuuden ja Brownin liikkeen jatkuvuuden nojalla $B(\widehat{s}^n) \in G$ riittävän suurilla $n \in \mathbb{N}_+$, joten yhtäsuuruus on voimassa. Päättelemme siis, että $\{\tau_G < t\} \in \mathscr{H}_t$, mikä oli osoitettava.

Oletetaan nyt, että G on suljettu ja olkoon $F := G^C$ sen komplementti, joka on avoin. Yritämme nyt osoittaa, että

$$\{\tau_G \leq t\} = \{\tau_G = t\} \cup \{\tau_G < t\} \in \mathscr{H}_t.$$

Jos $\tau_G = t$, niin tiedämme välittömästi, että $B(s) \in F$ jokaisella $s < t$. Nyt Brownin liikkeen jatkuvuuden nojalla,

$$B(t) = \lim_{s\uparrow t} B(s) \in \overline{F}.$$

Toisaalta suurimman alarajan määritelmän mukaan löytyy jono $(s_n) \downarrow t$, joille $B(s_n) \in G$. Siispä Brownin liikkeen jatkuvuuden nojalla

$$B(t) = \lim_{s_n \downarrow t} B(s_n) \in G,$$

sillä G oli suljettu joukko. Siispä $B(t) \in \partial G$. Toisaalta, jos tiedämme, että $B(t) \in \partial G$, niin joko $\tau_G = t$ (joukko G oli suljettu) tai sitten $\tau_G < t$. Olemme siis päätelleet, että

$$\{\tau_G = t\} \cup \{ \tau_G < t\} \subset \{B(t) \in \partial G\} \cup \{ \tau_G < t\} \subset \{ \tau_G = t\} \cup \{ \tau_G < t\}$$

eli

$$\{\tau_G \leq t\} = \{B(t) \in \partial G\} \cup \{ B(s) \in G \text{ jollakin } s < t\}$$

Kun G oli avoin, pystyimme esittämään tapahtuman $\{\exists s < t \colon B(s) \in G\}$ rationaalipisteiden avulla. Kun G on suljettu, sama päätelmä ei toimi. Voimme kuitenkin (yllätys, yllätys) pelastaa tilanteen, sillä $\mathbb{R}^d$:ssä löydämme helposti jonon (U_n) *avoimia* joukkoja, joille $U_1 \supset \overline{U}_2 \supset U_2 \cdots \supset G$ ja jotka edelleen toteuttavat

$$G = \bigcap U_n.$$

Siispä suoraan joukkojen (U_n) määritelmän mukaan

$$\{\exists s < t \colon B(s) \in G\} = \{\exists s < t, \forall n \in \mathbb{N} \colon B(s) \in U_n\}$$

Jos voisimme vaihtaa kvanttorien järjestyksen ja kirjoittaa

$$\{\exists s < t \colon B(s) \in G\} = \{\forall n \in \mathbb{N}, \exists s < t \colon B(s) \in U_n\} = \bigcap_n \{\exists s < t \colon B(s) \in U_n\},$$

niin todistuksen alkuosan perusteella voisimme päätellä, että $\{\tau_G < t\} \in \mathscr{H}_t$ ja edelleen $\{\tau_G \leq t\} \in \mathscr{H}_t$. Tällainen kvanttorien vaihto eli lausekkeesta ”*Jokaista ... kohti löytyy sellainen ..., että ... toteutuu*” lausekkeeseen ”*Löytyy sellainen ..., että jokaisella ... toteutuu*” siirtyminen on matematiikassa usein esiintyvä ns. *lokaalista* ehdosta *globaaliin* ehtoon siirtyminen.

Tällainen siirtymä on aina epätriviaali, mutta toinen suunta on helppo. Jos oletamme, että löytyy sellainen $s < t$, että jokaisella $n \in \mathbb{N} \colon B(s) \in U_n$, niin jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti taatusti löytyy sellainen $s \leq t$, että $B(s) \in U_n$. Vaikeampi suunta on yleensä jonkinsortin *kompaktisuusargumentti* ja niin myös tässä tapauksessa.

Oletetaan, että jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti on sellainen $s_n \leq t$, että $B(s_n) \in U_n$. Koska reaalilukujono (s_n) on ylhäältä rajoitettu, niin Analyysi I:n tuloksen nojalla löytyy *suppeneva osajono* $(s'_n) \subset (s_n)$ ja olkoon $s = \lim s'_n$. Nyt tiedämme, että $s \leq t$. Haluaisimme osoittaa, että $B(s) \in U_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, mikä onnistuu seuraavasti. Tiedämme, että $B(s_{n+1+m}) \in U_{n+1}$ jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Siispä $B(s) \in \overline{U}_{n+1} \subset U_n$, joten $B(s) \in U_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

□

3.3. **Vahva Markovin ominaisuus.** Tulemme nyt käsitteeseen, joka erottaa diskreetin ja jatkuvan tilanteen todella toisistaan. Diskreetissä tapauksessa kaikilla Markovin ketjuilla on vahva Markovin ominaisuus, mutta jatkuvassa tilanteessa näin ei enää ole. Luonnollisesti Brownin liikkeellä on tämäkin omainaisuus.

Kappaleen alussa määrittelimme Markovin ominaisuuden sekä pysähdyshetken. Diskreetissä tapauksessa, jos (X_n) on MK ja τ on jokin *pysähdyshetki* saatoimme tarkastella tapahtumia *pysähdyshetkeen* τ saakka. Voimme myös määritellä tapahtumat, jotka muodostavat *satunnaisen historian* hetkeen τ asti. Kaikki mahdolliset tapahtumat koostuvat polkutapahtumista

$$\{\tau = n, X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} =: A(n, i_0, \dots, i_n) \in \mathscr{H}_n$$

ja näiden virittämää σ-algebraa voisimme hyvin nimittää $\mathscr{H}_\tau$:lla. Koska

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(X_{\tau+m} = j \mid \mathscr{H}_\tau \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i_0,\dots i_n} [\, A(n, i_0, \dots, i_n)\,]\mathbf{P}\left(X_{n+m} = j \mid A(n, i_0, \dots, i_n) \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i_0,\dots i_n} [\, A(n, i_0, \dots, i_n)\,]\mathbf{P}\left(X_{n+m} = j \mid X_n = i_n \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i_n} [\, \tau = n, X_n = i_n\,]\mathbf{P}\left(X_{\tau+m} = j \mid X_\tau \right) \\
&= \mathbf{P}\left(X_{\tau+m} = j \mid X_\tau \right)
\end{aligned}$$

ja aikastationaarisessa tilanteessa $\mathbf{P}\left(X_{\tau+m} = j \mid X_\tau \right) = \mathbf{P}_{X_\tau}\left(X_m = j \right)$. Kuten huomaamme, nämä ovat täysin analogiset Markovin ominaisuuden kanssa, kun ajanhetki n on korvattu pysähdyshetkellä τ. Jotta voisimme yleistää tämän jatkuvaan tilanteeseen, meidän tulisi kyetä esittämään σ-algebra $\mathscr{H}_\tau$ ilman polkutapahtumia. Tämä vaatii hieman miettimistä ja jotta tätä pohdintaa ei kestäisi kovin kauan toteamme, että

$$A \in \mathscr{H}_\tau \text{ jos ja vain jos } \{A \text{ ja } \tau \leq n\} \in \mathscr{H}_n \text{ jokaisella } n \in \mathbb{N} \text{ (HT).}$$

Tämä muotoilu historian pysähdyshetkeen τ saakka on helppo yleistää, joten

3.18. **Määritelmä.** Olkoon $(\mathscr{F}_t)$ filtraatio ja τ pysähdyshetki. Tällöin *pysähdyshetken τ σ-algebra $\mathscr{F}_\tau$* on niiden tapahtumien $A \in \mathscr{F}$ joukko, joille

$$\mathscr{F}_\tau = \{\, A \in \mathscr{F} :\ \forall t \in T \colon \{A, \tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t \,\}$$

Ennenkuin mietimme, mitä ominaisuuksia σ-algebralla $\mathscr{F}_\tau$ on, niin voimme jo määritellä vahvan Markovin ominaisuuden.

3.19. **Määritelmä.** Stokastisella prosesilla (X_t) on *vahva Markovin prosessi filtraation* $(\mathscr{F}_t)$ suhteen, jos kaikilla ajanhetkillä $\infty > t+\tau \geq \tau$ ja kaikilla $A \in \mathscr{S}$ on voimassa

$$[\tau<\infty]\mathbf{P}\,(\,X_{t+\tau}\in A\,|\,\mathscr{F}_\tau\,) = [\,\tau<\infty\,]\mathbf{P}\,(\,X_{t+\tau}\in A\,|\,X_\tau\,) \quad \text{m.v.} \tag{3.20}$$

Aikastationaarinen vahva Markovin ominaisuus tarkoittaa, että

$$[\,\tau<\infty\,]\mathbf{P}\,(\,X_{t+\tau}\in A\,|\,\mathscr{F}_\tau\,) = [\,\tau<\infty\,]\mathbf{P}_{X_\tau}\,(\,X_t\in A\,) \quad \text{m.v.} \tag{3.21}$$

Tulemme kohta näyttämään, että

3.22. **Lause.** *Brownin liikkeellä on aikastationaarinen vahva Markovin ominaisuus.*

Voimme luonnostella tämän todistuksen heuristisesti, jotta tiedämme, mitä ominaisuuksia ja tietoja tarvitsemme. Jos matkimme todistusta, että yksiulotteinen Brownin liike on Markovin prosessi, niin voisimme yrittää seuraavaa

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\,B(t+\tau)\leq x\,|\,\widehat{\mathscr{H}_\tau}\right) &= \mathbf{P}\left(\,B(t+\tau)-B(\tau)\leq x-B(\tau)\,|\,\widehat{\mathscr{H}_\tau}\right)\\
&= \mathbf{P}\left(\,B(t+\tau)-B(\tau)\leq x-y\,|\,\widehat{\mathscr{H}_\tau}\right)\,|\,y=B(\tau)\\
&= \mathbf{P}\left(\,B(t+s)-B(s)\leq x-y\,|\,\widehat{\mathscr{H}_\tau}\right)\,|\,s=\tau, y=B(\tau)\\
&= \mathbf{P}\,(\,B(t+s)-B(s)\leq x-y\,)\,|\,s=\tau, y=B(\tau)\\
&= \mathbf{P}\,(\,B(t)\leq x-y\,)\,|\,s=\tau, y=B(\tau)\\
&= \mathbf{P}_y\,(\,B(t)\leq x\,)\,|\,y=B(\tau)\\
&= \mathbf{P}_{B(\tau)}\,(\,B(t)\leq x\,)
\end{aligned}$$

Toinen yhtäsuuruus vaatisi, että tietäisimme, että $B(\tau)$ on $\widehat{\mathscr{H}_\tau}$-mitallinen. Itse asiassa, emme vielä ole varmistaneet, että $B(\tau)$ on satunnaismuuttuja ylipäätään. Tähän palaamme siis piakkoin. Kolmannen ja viidennen rivin yhtäsuuruus tarkoittaisi, että tiedämme lisäyksen $B(\tau+t)-B(\tau)$ olevan riippumation σ-algebrasta $\widehat{\mathscr{H}_\tau}$ ja sen, että voimme kohdella pysähdyshetkeä τ kuin tavallista ajanhetkeä.

Tarkastelemme ensimmäistä kysymystä tarkemmin ja toinen seuraa samalla argumentilla, jota emme sitten toista. Palatkaamme tuttuun ja turvalliseen diskreettiin tilanteeseen. Tällöin σ-algebra $\mathscr{H}_\tau$ oli eksplisiittisesti määritelty, sillä $A \in \mathscr{H}_\tau$ jos ja vain jos

$$A = \bigcup_{k,n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i_{0,k,n},\dots,i_{n,k,n}} \{\tau = n, \forall j \le n \colon X_j = i_{j,k,n}\} =: \bigcup_n A_n.$$

mikä on varsinainen indeksiviidakko. Toisaalta huomaamme, että voimme ilmaista joukon hieman kompaktimmin asettamalla kuvauksen

$$f_n(i_0,\dots,i_n) = [\,\bigcup_k \{\forall j \le n \colon i_j = i_{j,k,n}\}\,]$$

Tällöin stokastinen prosessi $(Y_n) := (f_n(X_0,\dots,X_n))$ toteuttaa ehdon

$$[\,\tau = n\,]Y_n = [\,\bigcup_k \{\tau = n, \forall j \le n \colon X_j = i_{j,k,n}\}\,] = [\,A_n\,],$$

joten summaamalla havaitsemme, että

$$Y_\tau = \sum_n [\,\tau = n\,]Y_n = \sum_n [\,A_n\,] = [\,A\,],$$

joten erityisesti $\{Y_\tau = 1\} = A$. Stokastinen prosessi (Y_n) toteuttaa erityisen ominaisuuden: kullakin ajanhetkellä n satunnaismuuttuja Y_n on $\mathscr{H}_n$-mitallinen. Tällä tärkeällä ominaisuudella on luonnollisesti nimi.

3.23. **Määritelmä.** Olkoon (X_t) stokastinen prosessi ja $(\mathscr{F}_t)$ filtraatio. Sanomme, että X on *adaptoitu* filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen, jos X_t on $\mathscr{F}_t$-mitallinen jokaisella $t \in T$.

3.24. **Esimerkki.** Jokainen prosessi (X_t) on adaptoitu historiansa ja täydennetyn historiansa suhteen.

3.25. **Esimerkki.** Jos (X_n) on satunnaiskulku, niin

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(X_k)$$

on adaptoitu prosessin X historian suhteen.

3.26. **Esimerkki.** Jos τ on $(\mathscr{F}_t)$-pysähdyshetki, niin

$$X_t := [\,\tau \le t\,]$$

on $(\mathscr{F}_t)$-adaptoitu.

Palatkaamme takaisin σ-algebran $\mathscr{H}_\tau$ tarkasteluun. Edellä osoitimme jo, että jos $A \in \mathscr{H}_\tau$, niin on olemassa sellainen $(\mathscr{H}_n)$-adaptoitu prosessi Y, että $[\,A\,] = Y_\tau$. Jos määrittelemme, että

$$\mathscr{G} := \sigma\big(\{\, Y_\tau : \ Y \text{ on } (\mathscr{H}_n)\text{-adaptoitu} \,\}\big),$$

niin edellisen perusteella $A \in \mathscr{G}$. Siispä $\mathscr{H}_\tau \subset \mathscr{G}$. Toisaalta, jos Y on $(\mathscr{H}_n)$-adaptoitu, niin

$$Y_n = g_n(X_0, \dots, X_n)$$

jollakin kuvauksilla (g_n), joten

$$Y_\tau = \sum_n \sum_{i_0,\dots,i_n} [\,\tau = n, \forall j \le n \colon X_j = i_j\,] g_n(i_0, \dots, i_n),$$

eli Y_τ on $\mathscr{H}_\tau$-mitallinen. Tästä voimme päätellä, että $\{\ \{Y_\tau \in B\} : \ B \in \mathscr{S},$ ja Y on $(\mathscr{H}_n)$-adaptoitu $\} \subset \mathscr{H}_\tau$, joten $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}_\tau$. Siispä $\mathscr{H}_\tau = \mathscr{G}$.

Voisimme yrittää yleistää tätä jatkuvaan tilanteeseen ja yrittää osoittaa, että

$$\mathscr{H}_\tau = \sigma\big(\{\ Y_\tau : \ Y \text{ on } (\mathscr{H}_t)\text{-adaptoitu }\}\big),$$

Koska B on adaptoitu täydennetyn historiansa suhteen, voisimme silloin todeta, että $B(\tau)$ on sekä satunnaismuuttuja, että $\mathscr{H}_\tau$-mitallinen.

Tämä ei tosin pidä paikkaansa täydessä yleisyydessään, mutta varsin pieni muutos tarvitaan. Tämä tulos ei luonnollisesti ole mitenkään yleisin mahdollinen, mutta varsin riittävä tarpeisiimme. On huomattava, että tämä muutos on järkevä vain jatkuvassa tilanteessa.

3.27. **Määritelmä.** Olkoon (X_t) stokastinen prosessi. Sanomme, että X on *càdlàg-prosessi*, jos se on oikealta jatkuva ja sillä on vasemmanpuoleiset raja-arvot jokaisella ajanhetkellä $t \in T$.

3.28. **Esimerkki.**
– jatkuvat prosessit ovat càdlàg-prosesseja
– kun τ on pysähdyshetki, niin prosessi $Y_t = [\,\tau \le t\,]$ on càdlàg.

3.29. **Lause.** *Jos τ on $(\mathscr{F}_t)$-pysähdyshetki ja $(\mathscr{F}_t)$ on oikealta jatkuva ja täydennetty nollajoukoilla, niin*

$$\mathscr{F}_\tau = \sigma\big(\{\ Y_\tau : \ Y \textit{ on } (\mathscr{F}_t)\textit{-adaptoitu càdlàg-prosessi }\}\big),$$

Todistus. Merkitään väitteen oikean puolen σ-algebraa $\mathscr{G}$:llä. Olkoon $A \in \mathscr{F}_\tau$. Tällöin

$$Y_t = [\,A, \tau \le t\,] \in \mathscr{F}_t$$

joten Y_t on adaptoitu. Lisäksi edellisen esimerkin mukaan se on càdlàg-prosessi, sillä ajan suhteen vakiolla $[\,A\,]$ kertominen ei muuta tilannetta. Nyt $Y_\tau = \{A\}$, joten $A \in \mathscr{G}$. Tämä osoittaa, että $\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{G}$.

Toiseen suuntaan riittää osoittaa, että jos Y_t on reaaliarvoinen adaptoitu càdlàg-prosessi, niin $Y_\tau \in \mathscr{F}_\tau$. (HT. Miksi?) Tulee siis näytää, että $\{Y_\tau \le$

$x, \tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$. Voimme käyttää summaustekniikkaa, joten

$$[\,Y_\tau \leq x, \tau \leq t\,] = \sum_k [\,\widehat{\tau}^\varepsilon = \varepsilon k, Y_\tau \leq x, \tau \leq t\,].$$

Tiputamme jatkossa yläindeksin ε hetkeksi pois ja merkitsemme $\widehat{\tau}_+ = \widehat{\tau} + \varepsilon$. Nyt

$$\{\widehat{\tau}^\varepsilon = \varepsilon k, Y_\tau \leq x, \tau \leq t\} = \{\widehat{\tau} = \varepsilon k, Y(\widehat{\tau}_+) \leq x + R_\varepsilon(k), \tau \leq t\},$$

missä $R_\varepsilon(k) = [\,\widehat{\tau} = \varepsilon k\,](Y(\widehat{\tau}_+) - Y(\tau))$. Voimme nyt käyttää hyväksi oikealta jatkuvuutta. Koska väli $[0,t]$ on suljettu, niin jatkuvuus on tasaista eli formaalisti

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall s, r \in [0,t] \colon |Y(s) - Y(r)| \geq \varepsilon \to |s - r| \geq \delta$$

Valitaan nyt $\alpha > 0$. Tällöin siis löytyy sellainen $\delta(\alpha) > 0$, että jos $|R_\varepsilon(k)| \geq \alpha$, niin $|\tau - \widehat{\tau}_+| \geq \delta(\alpha)$. On kuitenkin huomattava, että $\delta(\alpha)$ on *satunnainen.* Voimme siis arvioida, että

$$[\,|R_\varepsilon(k)| \geq \alpha\,] \leq [\,\widehat{\tau}_+ - \tau \geq \delta(\alpha), \widehat{\tau} = \varepsilon k\,] \leq [\,\delta(\alpha) \leq \varepsilon, \widehat{\tau} = \varepsilon k\,],$$

joten

$$\sum_k [\,B_k, |R_\varepsilon(k)| \geq \alpha, \tau \leq t\,] \leq [\,\delta(\alpha) \leq \varepsilon\,]$$

oli B_k mikä tahansa jono tapahtumia. Kun $\varepsilon \to 0$, niin oikea puoli häviää melkein varmasti. Voimme myös päätellä, että

$$\sup_{m \geq n} \sum_k [\,B_k, |R_{2^{-m}}(k)| \geq \alpha, \tau \leq t\,] \leq [\,\delta(\alpha) \leq 2^{-n}\,] \to 0, \text{ kun } n \to \infty$$

joten

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} \{B_k, |R_{2^{-m}}(k)| \geq \alpha, \tau \leq t\} \in \mathscr{N}$$

sillä tapahtuma on nollatapahtuma. Edelleen voimme päätellä, että

$$N := \bigcup_{\mathbb{Q} \ni \alpha > 0} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} \{B_k, |R_{2^{-m}}(k)| \geq \alpha, \tau \leq t\} \in \mathscr{N}$$

Tämä tapahtuma voidaan myös tulkita seuraavasti:

$$\begin{aligned} N = \{&\text{annetulla } \alpha > 0 \text{ tapahtuma } B_k, |R_{2^{-m}}(k)| \geq \alpha \text{ ja } \tau \leq t \\ &\text{tapahtuu äärettömän usein}\} \end{aligned}$$

Voimmekin siten olettaa, että $\varepsilon > 0$ on niin pieni, että $|R_\varepsilon(k)| \leq \alpha$ melkein varmasti ja tarkastella tapahtumaa

$$A_k(\varepsilon) := \{\widehat{\tau} = \varepsilon k, Y(\varepsilon k + \varepsilon) \leq x + R_\varepsilon(k), \tau \leq t\}.$$

Havaitsemme välittömästi, että $C_k^-(\varepsilon, \alpha) \subset A_k(\varepsilon) \subset C_k^+(\varepsilon, \alpha)$, kun

$$C_k^\pm(\varepsilon, \alpha) := \{\widehat{\tau} = \varepsilon k, Y(\varepsilon k + \varepsilon) \leq x \pm \alpha, \tau \leq t\}$$

Tästä seuraa, että

$$\sup_{m\geq n}\sum_k [\,A_k(2^{-m})\,] \leq \sup_{m\geq n}\sum_k [\,C_k^+(2^{-m},\alpha)\,]$$

jokaisella alkeistaphtumalla ω, kunhan $n\in\mathbb{N}$ on riittävän suuri. Siispä melkein varmasti

$$[\,Y_\tau \leq x, \tau\leq t\,] \leq \limsup_m \sum_k [\,C_k^+(2^{-m},\alpha)\,]$$

jokaisella rationaalisella $\alpha > 0$.

Voimme nyt arvioida edelleen ja päätellä, että

$$\limsup_{m\to\infty}\sum_k [\,C_k^+(2^{-m},\alpha)\,] \leq [\,Y_\tau \leq x+2\alpha, \tau\leq t\,].$$

Kun $\alpha\to 0^+$, niin monotonisuuden perusteella

$$[\,Y_\tau \leq x, \tau\leq t\,] = \liminf_{\alpha\to 0}\limsup_{m\to\infty}\sum_k [\,C_k^+(2^{-m},\alpha)\,]$$

melkein varmasti. Siispä olemme osoittaneet, että haluttua indikaattoria $[\,Y_\tau \leq x, \tau\leq t\,]$ voidaan nollatapahtumien indikaattoreita vaille approksimoida satunnaismuuttujajien jonona, joten indikaattori on ainakin satunnaismuuttuja. Koska

$$\sum_k [\,C_k^+(2^{-m},\alpha)\,] \text{ on } \mathscr{F}_{t+2^{-m}}\text{-mitallinen}$$

jokaisella $m\in\mathbb{N}$ ja $\alpha>0$, niin voimme päätellä, että

$$\limsup_{m\to\infty}\sum_k [\,C_k^+(2^{-m},\alpha)\,] \text{ on } \mathscr{F}_t^+\text{-mitallinen}$$

joten edelleen $\{Y_\tau \leq x, \tau\leq t\}\in\widehat{\mathscr{F}_t^+}$. Koska $(\mathscr{F}_t)$ oli oikealta jatkuva ja täydennetty, niin $\{Y_\tau\leq x,\tau\leq t\}\in\mathscr{F}_t$ ja väite seuraa. □

Tämän lauseen perusteella voimme päätellä, että Brownin liikkeellä on aikastationaarinen vahva Markovin ominaisuus, jos

$$\mathbf{P}\,(\,B(\tau+t)-B(\tau)\leq x\,|\,\mathscr{H}_\tau\,) = \mathbf{P}\,(\,B(t)\leq x\,)\,.$$

Koska oikea puoli on luku, joten taatusti $\mathscr{H}_\tau$-mitallinen, niin ehdollisen odotusarvon määritelmän perusteella riittääkin osoittaa, että

$$\mathbf{P}\,(\,A, B(\tau+t)-B(\tau)\leq x\,) = \mathbf{P}\,(\,B(t)\leq x\,)\,\mathbf{P}\,(\,A\,)$$

jokaisella $A\in\mathscr{H}_\tau$. Toistamalla edellisen lauseen approksimointiargumentin, voimme todeta, että tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\mathbf{P}\,(\,B(t)\leq x\,)\,\mathbf{P}\,(\,A\,) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sum_k \mathbf{P}\,(\,A, \widehat{\tau}=\varepsilon k, B(\widehat{\tau}+\varepsilon+t)-B(\widehat{\tau}+\varepsilon)\leq x\,)$$

Koska $\{A, \widehat{\tau} = \varepsilon k\} = \{A, \varepsilon k \leq \tau < \varepsilon k + \varepsilon\} \in \mathscr{H}_{\varepsilon k+\varepsilon}$ ja satunnaismuuttuja$\widehat{\tau}$ saa vain numeroituvan määrän arvoja, joten voimme soveltaa Brownin liikkeen Markovin ominaisuutta ja

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\,(\,A, \widehat{\tau} = \varepsilon k, B(\widehat{\tau} + \varepsilon + t) - B(\widehat{\tau} + \varepsilon) \leq x\,) \\
&= \mathbf{E}\left([\,A, \widehat{\tau} = \varepsilon k\,]\mathbf{P}\,(\,B(\widehat{\tau} + \varepsilon + t) - B(\widehat{\tau} + \varepsilon) \leq x \,|\, \mathscr{H}_{\varepsilon k+\varepsilon}\,)\right) \\
&= \mathbf{P}\,(\,A, \widehat{\tau} = \varepsilon k\,)\,\mathbf{P}\,(\,B(t) \leq x\,)
\end{aligned}$$

Summamalla nyt todennäköisyydet yhteen ja menemällä rajalla saamme,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_k \mathbf{P}\,(\,A, \widehat{\tau} = \varepsilon k\,)\,\mathbf{P}\,(\,B(t) \leq x\,) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbf{P}\,(\,B(t) \leq x\,)\,\mathbf{P}\,(\,A\,)\,,$$

joten olemme saaneet osoitettua, että

3.30. **Lause.** *Brownin liikkeelle on vahva Markovin ominaisuus.*